

The Medicina IRA - SKA Engineering Group

**Note sul Beamforming
per il BEST-1**

S.Montebugnoli, G.Bianchi, C.Bortolotti, A.Cattani,
F.Ghelfi, A.Maccaferri, F.Perini, M.Roma

IRA N. 354/04



1 INTRODUZIONE AL BEAMFORMING

Per *Beamforming* si intende la combinazione di segnali provenienti da un array di piccole antenne non direzionali in modo da formare una grande antenna direzionale che riceva il segnale proveniente da una direzione ben precisa, limitando il contributo di segnali provenienti da altre direzioni. L'antenna risultante può essere puntata elettronicamente, senza compiere quindi un movimento fisico.

Per comprendere meglio il significato si faccia riferimento allo schema di Fig:1.

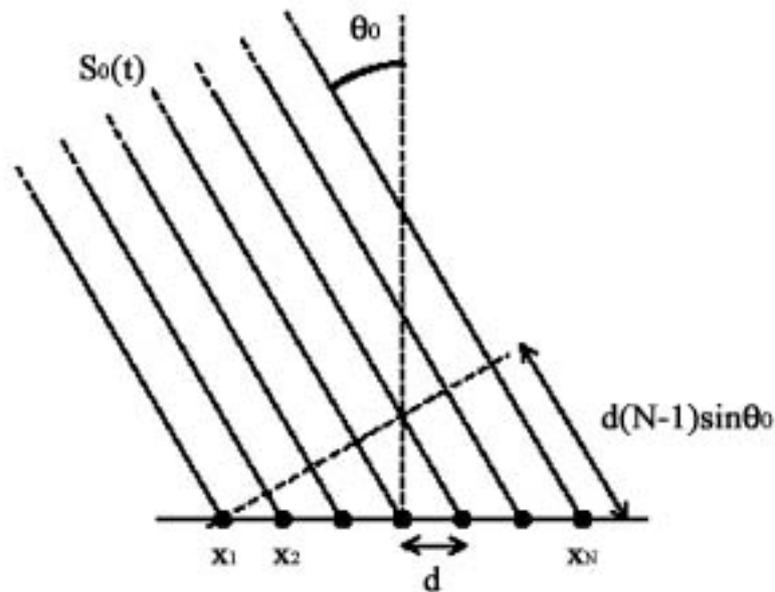


Figura 1: Schiera lineare uniforme.

Si consideri una schiera di N sensori, nella quale la distanza tra due elementi contigui tra loro sia d . Si supponga di ricevere un segnale

$$S = S_0 \exp^{j2\pi f_0 t} \quad (1)$$

a banda stretta (monocromatico), di ampiezza S_0 e potenza σ_0^2 .

Supponendo che la sorgente sia in campo lontano rispetto alla schiera, il fronte d'onda alle antenne può essere assunto piano. Essendo la sorgente a grande distanza e le antenne riceventi vicine tra loro, si può ritenere trascurabile la differenza di ampiezza tra i segnali ricevuti alle singole antenne a meno di un ritardo

$$\tau_n = \frac{d_n \sin \theta_0}{c} \quad (2)$$

dove:

- $d_n = d \cdot (n - 1)$;
- θ_0 indica la direzione di arrivo;
- c la velocità della luce nel vuoto.

Il segnale ricevuto dall' n -esimo elemento della schiera risulta essere:

$$x_n(t) = S_0(t) \exp^{j 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta_0 (N-1)} \quad (3)$$

dove con

$$S_0(t) = S_0 \exp^{j 2\pi f_0 t} \quad (4)$$

si indica la sinusoide generalizzata.

Per semplicità si ometta il termine temporale t e si utilizzi una notazione vettoriale, rappresentando con

$$\bar{\mathbf{x}} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_N]^T \quad (5)$$

il vettore che contiene tutti i segnali ricevuti delle singole N antenne.

Si può quindi scrivere:

$$\bar{\mathbf{x}} = S_0 \bar{\mathbf{a}}_0 \quad (6)$$

dove con $\bar{\mathbf{a}}_0$ si rappresenta la risposta della schiera al segnale a banda stretta proveniente dalla direzione θ_0 . Il vettore $\bar{\mathbf{a}}_0$ assume la forma:

$$\bar{\mathbf{a}}_0 = [a_1(\theta_0) \quad a_2(\theta_0) \quad \dots \quad a_N(\theta_0)]^T \quad (7)$$

che è equivalente a:

$$\bar{\mathbf{a}}_0 = [1 \quad \exp^{j2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta_0} \quad \dots \quad \exp^{j2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta_0 (N-1)}]^T \quad (8)$$

Si può considerare inoltre che il segnale ricevuto dalla schiera possa essere affetto da rumore, per cui la formula (6) diventa:

$$\bar{\mathbf{x}} = S_0 \bar{\mathbf{a}}_0 + \bar{\mathbf{n}} \quad (9)$$

dove con:

$$\bar{\mathbf{n}} = [n_1 \quad n_2 \quad \dots \quad n_N]^T \quad (10)$$

si indica un rumore gaussiano, di potenza σ^2 , incorrelato alle singole antenne e con matrice di covarianza

$$\bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{n}} = \sigma^2 \bar{\mathbf{I}}_N \quad (11)$$

La combinazione in modo coerente del segnale S_0 alle singole antenne si ottiene compensando il termine di ritardo di ciascuna antenna e sommando gli N contributi in modo pesato. Questo equivale ad effettuare il prodotto tra il vettore $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{a}}_0^H$.¹

Si ottiene quindi:

$$y = \bar{\mathbf{a}}_0^H \bar{\mathbf{x}} = \sum_{n=1}^N a_n^*(\theta_0) x_n = y_0 + y_n \quad (12)$$

¹ H =Hermitiano o coniugato trasposto

con

$$y_0 = S_0 \sum_{n=1}^N \exp^{-j2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta_0 (n-1)} \exp^{j2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta_0 (n-1)} = NS_0 \quad (13)$$

$$y_n = \sum_{n=1}^N \exp^{-j2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta_0 (n-1)} n_n \quad (14)$$

In questo modo gli sfasamenti sul segnale S_0 vengono annullati. Il vettore $\bar{\mathbf{a}}_0$ è detto *steering vector* in quanto gli N pesi che lo compongono sono tali da dirigere il fascio in direzione θ_0 . Si dice quindi che il fascio è stato puntato in direzione θ_0 .

Le tecniche di beamforming consistono quindi nel combinare linearmente le N uscite della schiera con opportuni pesi

$$\bar{\mathbf{w}} = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \dots \quad \omega_N]^T \quad (15)$$

in modo da ottenere una stima ragionevole y del segnale S_0 .

$$y = \bar{\mathbf{w}}^H \bar{\mathbf{x}} = \sum_{n=1}^N \omega_n^* x_n \quad (16)$$

2 ALGORITMI DI BEAMFORMING

La ricezione del segnale radioastronomico presenta problemi in quanto è un segnale (noise) di potenza estremamente bassa immerso nel rumore termico generato dal ricevitore. Il problema si aggrava quando si è in presenza di segnali interferenti, che possiedono sempre potenze maggiori del segnale radioastronomico.

Per tentare di risolvere le problematiche sopra citate, si stanno studiando algoritmi matematici che, sfruttando la non correlazione tra i diversi segnali, permettono la ricezione di quelli utili, limitando in modo opportuno, o nella migliore delle ipotesi annullando, gli interferenti.

I metodi individuati ed analizzati sono tre in particolare:

- ***NULL BEAM STEERING***: forza risposta nulla nella direzione degli interferenti, garantendo guadagno massimo nella direzione del segnale utile. La formula per la soluzione di questo algoritmo è:

$$\bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{A}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{U}} \quad (17)$$

dove

$$\bar{\mathbf{A}} = [\bar{\mathbf{a}}_0 \quad \bar{\mathbf{a}}_1 \quad \dots \quad \bar{\mathbf{a}}_k]^H \quad (18)$$

è un vettore che contiene tutte le risposte della schiera ai k segnali ricevuti e

$$\bar{\mathbf{U}} = [1, 0, \dots, 0]^T \quad (19)$$

contiene un valore unitario in corrispondenza del segnale che si desidera ottenere in uscita al beamformer e tanti nulli quanti sono i contributi dei segnali interferenti da annullare.

- **MMSE (MINIMUM MEAN SQUARE ERROR)**: permette di ottenere i pesi $\bar{\mathbf{w}}$ minimizzando l'errore quadratico medio

$$E[|S_0 - \bar{\mathbf{w}}^H \bar{\mathbf{x}}|^2] \quad (20)$$

tra il segnale S_0 che si desidera ricevere e la sua stima definita in (16). La formula per la soluzione di questo algoritmo risulta essere:

$$\bar{\mathbf{w}} = \sigma_0^2 \bar{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{a}}_0 \quad (21)$$

dove con σ_0^2 si indica la potenza del segnale che si desidera ricevere, mentre $\bar{\mathbf{R}}$ è la matrice di covarianza contenente il contributo dei singoli segnali e del noise.

- **MVDR (MINIMUM VARIANCE DISTORSIONLESS RESPONSE)**: permette di ottenere i pesi $\bar{\mathbf{w}}$ mantenendo unitario il guadagno nella direzione θ_0 di ricezione del segnale. La formula per la soluzione di questo algoritmo risulta essere:

$$\bar{\mathbf{w}} = \frac{\bar{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{a}}_0}{\bar{\mathbf{a}}_0^H \bar{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{a}}_0} \quad (22)$$

dove con $\bar{\mathbf{a}}_0$ si indica lo steering vector del segnale che si vuole ricevere, mentre $\bar{\mathbf{R}}$ è la matrice di covarianza che contiene i contributi del segnale che si vuole ricevere, dei segnali interferenti e del noise.

La teoria alla base di ciascuno di questi algoritmi prevede che, dati N sensori (o ricevitori), si abbiano a disposizione $N - 1$ gradi di libertà. Un grado di libertà viene utilizzato per ricevere sempre la massima potenza nella direzione di arrivo del segnale utile. Rimangono a disposizione, in questo modo, $N - 2$ gradi di libertà per posizionare $N - 2$ nulli nella direzione di arrivo dei segnali interferenti [3].

3 APPLICAZIONE DEGLI ALGORITMI DI BEAMFORMING PER BEST-1

Le simulazioni MATLAB² sono state eseguite facendo riferimento al progetto BEST-1[4].

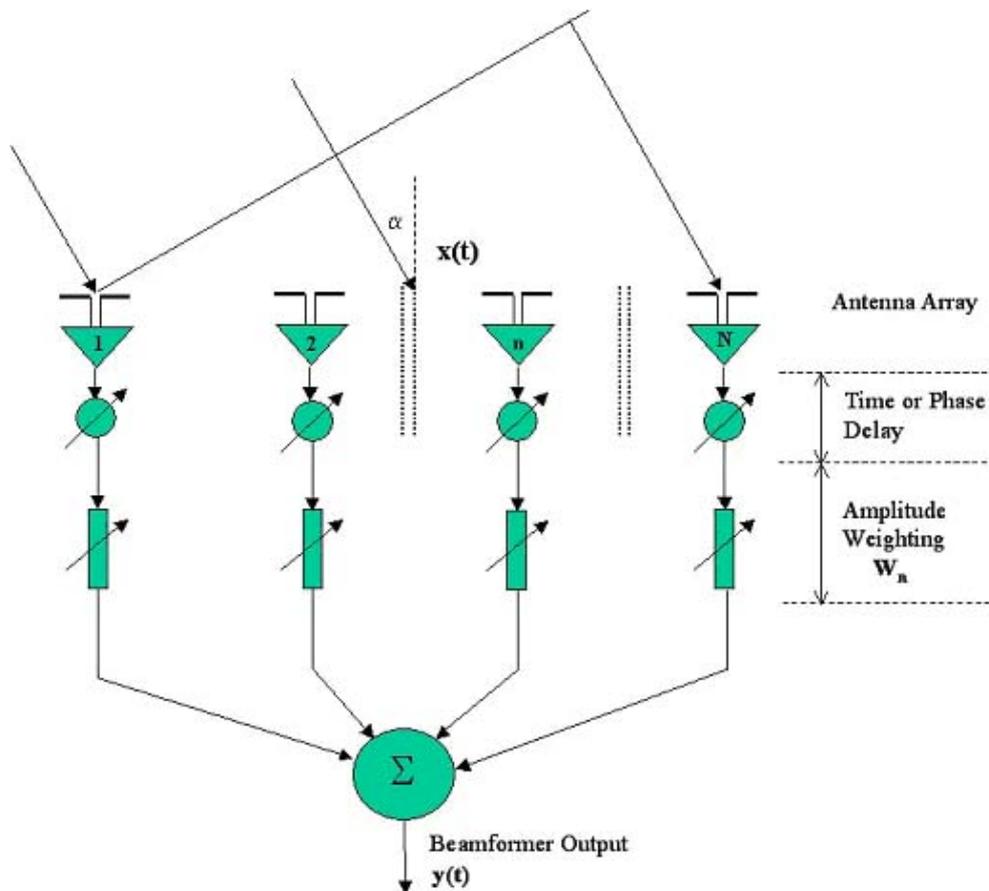


Figura 2: Implementazione del beamforming a livello RF.

Il beamforming per BEST-1 è previsto possa essere effettuato in due step separati non mutuamente esclusivi: un primo livello analogico quando il segnale ricevuto è ancora a radiofrequenza (Fig:2), ed un secondo livello

²MATLAB©, The MathWorks Inc., Release 12.1

digitale.

Queste simulazioni sono di carattere qualitativo, effettuate a livello analogico per comprendere quale potrebbe essere il diverso comportamento dell'antenna in riferimento all'algoritmo di beamforming implementato.

Per effettuare le simulazioni sono stati presi in considerazione casi differenti:

- 4 ricevitori per cilindro parabolico costituiti da 16 dipoli in parallelo;
- 8 ricevitori per cilindro parabolico costituiti da 8 dipoli in parallelo;
- 64 ricevitori per cilindro parabolico costituiti da 1 dipolo (caso puramente teorico).

Si è supposto che l'array fosse costituito da antenne ideali omnidirezionali collegate in parallelo ed in numero pari a quello dei dipoli attualmente installati sulla linea focale, cioè 64. Tale sostituzione può essere considerata lecita in quanto il contributo del singolo elemento, nel diagramma di radiazione della schiera, diventa trascurabile quando il numero dei sensori è elevato.

Si è considerato di disporre di un segnale utile da ricevere con una potenza estremamente inferiore a quella dei segnali interferenti (dell'ordine di $40dB$), posizionato in $\theta_0 = 0^\circ$. Il calcolo del segnale di uscita del beamformer è stato eseguito seguendo le formule (17), (21), (22), il cui valore è stato normalizzato, in quanto gli algoritmi sono risultati non esserlo.

3.1 BEST-1 con 4 ricevitori

Le prime simulazioni effettuate consistevano nell'analisi del comportamento di BEST-1 con 4 ricevitori. Si è supposto di essere in presenza di 1 interferente (anche se la teoria esposta in precedenza afferma che è possibile reiettare 2 interferenti) la cui posizione è generata casualmente.

Come affermato in precedenza, si è assunto di ricevere un segnale utile dalla direzione $\theta_0 = 0^\circ$, per cui il lobo principale del diagramma di radiazione deve risultare essere puntato in quella direzione.

I primi risultati ottenuti implementando l'algoritmo di MVDR sono riportati in Fig:3. Si può notare come il diagramma di radiazione ottenuto sia deformato rispetto al diagramma ottenuto con un beamforming convenzionale. Questo risultato è imputabile ai pochi gradi di libertà che si hanno a disposizione.

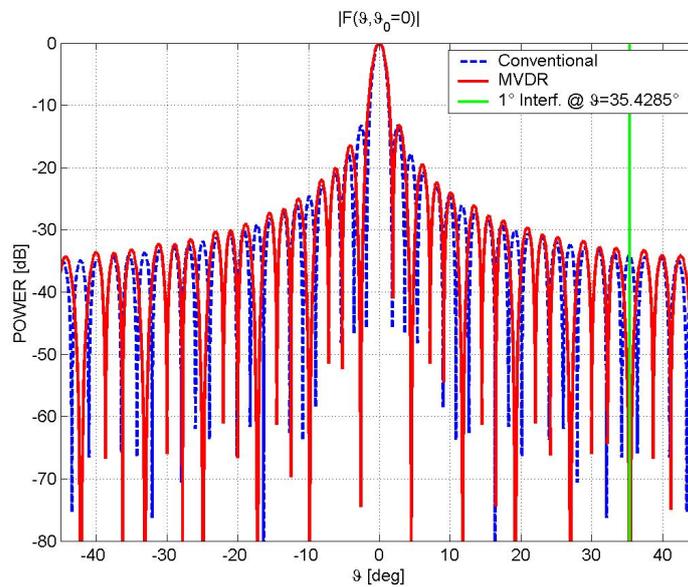


Figura 3: Diagramma di radiazione ottenuto con un beamforming convenzionale (Fourier) ed uno adattivo (MVDR) in presenza di un interferente posizionato in $\theta \simeq 35^\circ$.

In Fig:4 viene riportato un ingrandimento intorno alla posizione dell'interferente reiettato (linea verticale). Questo mostra quanto il segnale interferente venga attenuato rispetto ad un beamforming convenzionale, mentre il lobo principale continua ad essere puntato in direzione del segnale utile.

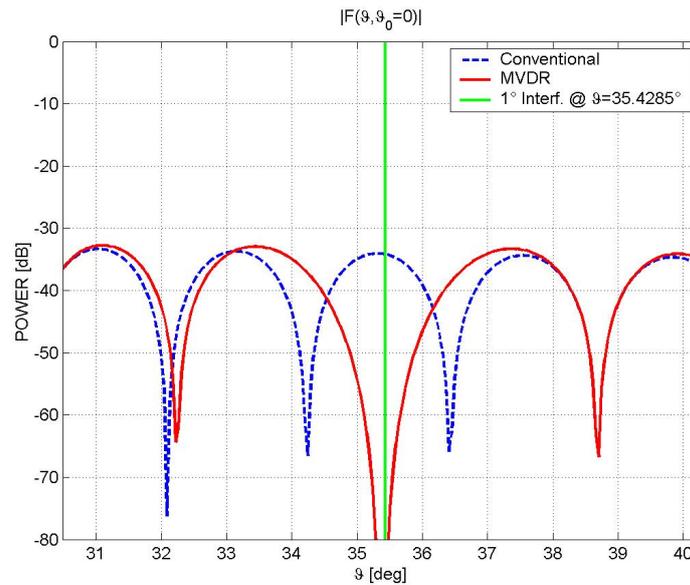


Figura 4: Ingrandimento intorno alla posizione dell'interferente.

Si è notato in seguito come vi siano particolari posizioni dell'interferenza per le quali l'algoritmo riesce a reiettare l'interferenza, mentre non riesce a garantire il puntamento in direzione del segnale utile (vedi Fig:5). Questo comporta inevitabilmente una perdita di potenza del segnale ricevuto con conseguente diminuzione di sensibilità.

In seguito sono state effettuate simulazioni implementando gli algoritmi di Null Beam Steering e MMSE. Anche queste simulazioni hanno presentato una netta attenuazione dell'interferente (Fig:6), ma confermando come con 4 sensori siano comunque pochi i gradi di libertà che si hanno a disposizione per reiettare le interferenze.

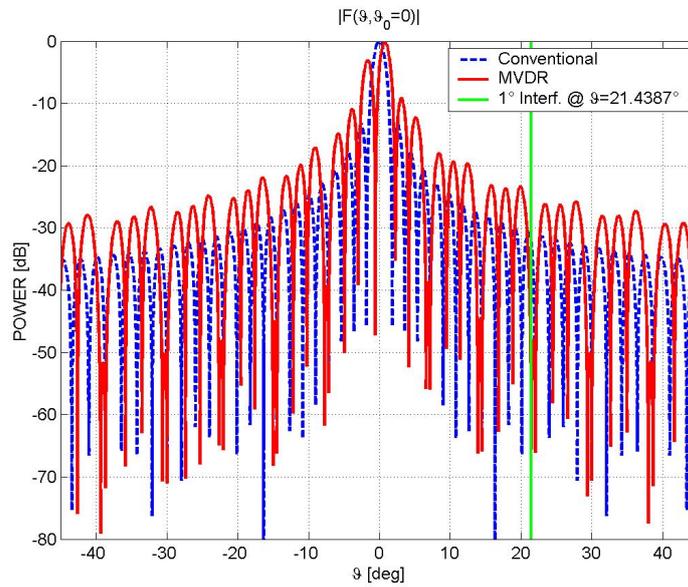


Figura 5: Diagramma di radiazione nel quale risulta evidente un errore di puntamento del lobo principale in direzione del segnale utile di $\simeq 0.8^\circ$.

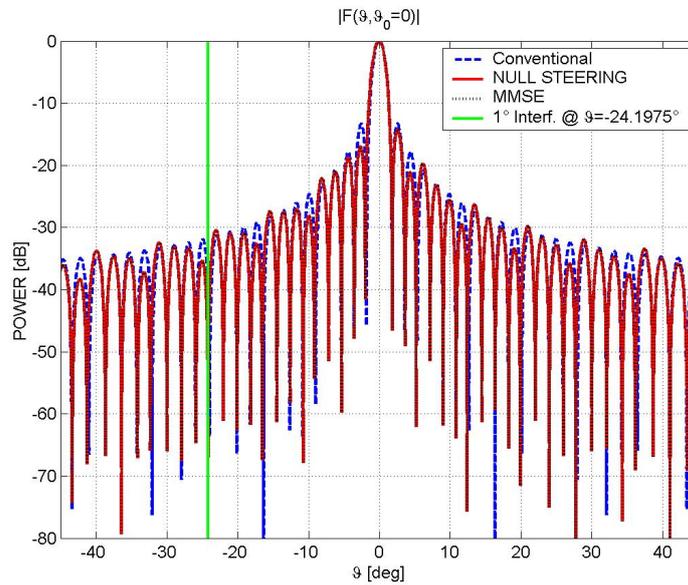


Figura 6: Diagramma di radiazione ottenuto implementando gli algoritmi di Null Beam Steering e MMSE.

3.2 BEST-1 con 8 ricevitori

Una nuova serie di simulazioni è stata eseguita con un numero di ricevitori pari a 8, aumentando in questo modo il numero dei gradi libertà del sistema. Si è ipotizzato che il segnale utile fosse posizionato in direzione θ_0° .

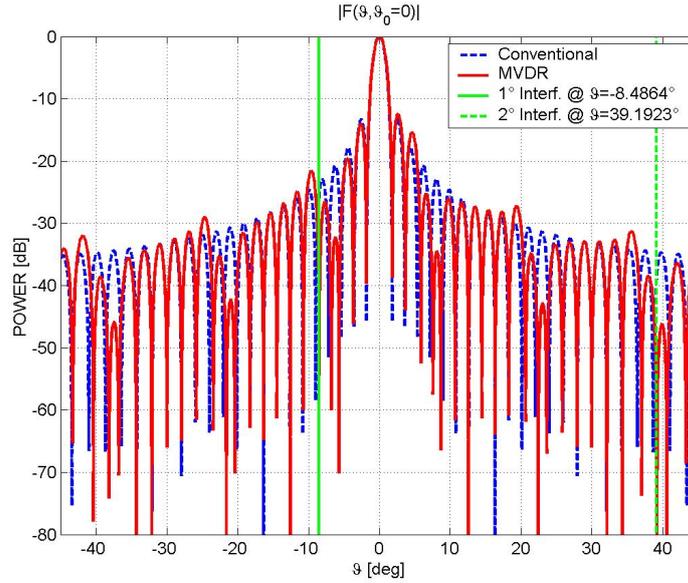


Figura 7: Implementazione dell' algoritmo di MVDR con 2 interferenti posizionati in $\theta \simeq -8.5^\circ$ (linea verticale continua) e $\theta \simeq 39^\circ$ (linea verticale tratteggiata).

Si sono effettuate simulazioni con più interferenti e, fino ad un numero di 3, gli algoritmi implementati presentano un diagramma di radiazione molto simile a quello ottenuto con un beamforming convenzionale.

Gli interferenti risultano essere reiettati e il lobo principale meno deformato rispetto a quanto ottenuto nelle simulazioni con 4 ricevitori.

In Fig:7 vengono riportati i risultati ottenuti implementando l' algoritmo di MVDR in presenza di 2 interferenti. Queste simulazioni sono state effettuate anche implementando gli algoritmi di Null Beam Steering e MMSE,

evidenziando risultati conformi a quanto ottenuto col MVDR.

3.3 BEST-1 con 64 ricevitori

Le simulazioni sono state effettuate supponendo di installare un ricevitore per ogni dipolo, per un totale di 64 ricevitori.

Si è ipotizzato di ricevere un segnale utile dalla direzione $\theta_0 = 0^\circ$ e si sono implementati gli algoritmi illustrati in precedenza.

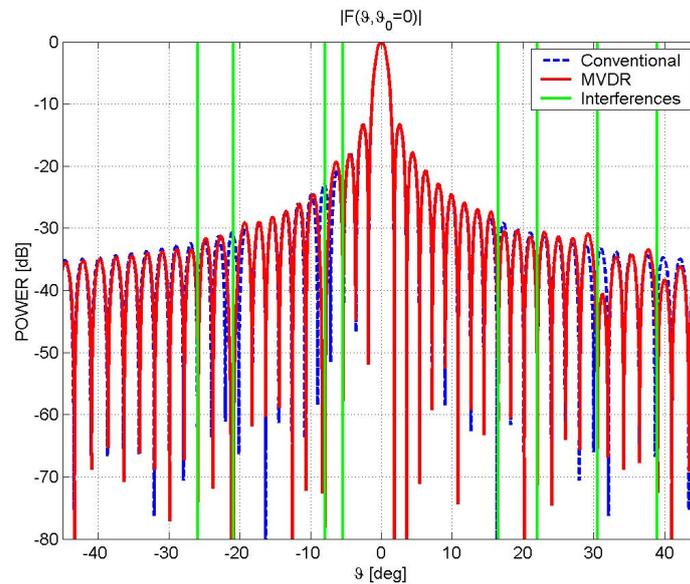


Figura 8: Diagramma di radiazione ottenuto implementando l'algoritmo MVDR in presenza di 8 interferenti posizionati in: $\theta_1 \simeq -8^\circ$, $\theta_2 \simeq 22^\circ$, $\theta_3 \simeq -21^\circ$, $\theta_4 \simeq -5^\circ$, $\theta_5 \simeq 39^\circ$, $\theta_6 \simeq 16^\circ$, $\theta_7 \simeq -29^\circ$, $\theta_8 \simeq 31^\circ$.

In Fig:8 è riportato il risultato ottenuto dalla simulazione effettuata implementando l'algoritmo di MVDR. Si può notare come il numero dei gradi di libertà del sistema è tale da fornire la reiezione di più segnali interferenti, mantenendo il lobo principale in direzione del segnale utile.

Questo caso non risulta essere realizzabile dal punto di vista pratico, in quanto richiederebbe l'installazione di 64 ricevitori e una modifica strutturale sostanziale dell'intera linea focale, problematica che richiederebbe costi troppo elevati.

4 CONCLUSIONI

Come evidenziato in precedenza la teoria del beamforming afferma che dati N sensori, o ricevitori, si hanno a disposizione $N - 1$ gradi di libertà per il sistema. Un grado di libertà viene utilizzato per ricevere sempre la massima potenza nella direzione di arrivo del segnale utile. Rimangono, in questo modo, a disposizione $N - 2$ gradi di libertà per posizionare $N - 2$ nulli nelle direzioni di arrivo dei segnali interferenti. [3]

Dalle simulazioni effettuate si ottiene che, in accordo con [5], il BEST-1 con 4 ricevitori possiede pochi gradi di libertà. Da quanto detto ne consegue che il sistema ha grosse difficoltà a reiettare anche 1 solo interferente, indipendentemente dall'algoritmo utilizzato. Aumentando il numero di ricevitori si ottiene un miglioramento della situazione in quanto aumentano i gradi di libertà del sistema. La situazione migliore la si ottiene utilizzando un ricevitore per ogni dipolo, ma questa resta una situazione puramente teorica in quanto la sua implementazione richiederebbe costi onerosi.

Riferimenti bibliografici

- [1] "The Northern Cross as a very promising SKA test bed", rapporto interno IRA 322/02.
- [2] "Elaborazione numerica dei segnali", Note delle lezioni, AA - 2001-2002.
- [3] "Applicazione delle Smart Antennas nei sistemi di trasmissione radiomobili", S.Panacea. Università di Ferrara, Dipartimento di Ingegneria.
- [4] "The BEST-1 SKA Demonstrator (Release A)", rapporto interno IRA
- [5] "Robust Steering Vector Mismatch Techniques for Reduced Rank Adaptive Array Signal Processing", Hien N. Nguyen.