

L.Bentivogli,G.Colla,A.Ficarra,A.Gallerani,  
E.Gandolfi,C.Lari,F.Magaroli,A.Micheloni,  
G.Minarelli,F.Perugini,C.Rizzi e G.Tomassetti

IL SISTEMA A INSEGUIMENTO DI FRANGIA PER  
L'ACQUISIZIONE DEI DATI DEL RADIOTELESCOPIO  
"CROCE DEL NORD"

Luglio 1975



1 - Introduzione

L'inseguimento di frangia si inserisce nel progetto generale di un nuovo sistema di acquisizione dei dati del radiotelescopio "Croce del Nord". Il criterio di formazione dell'immagine usato finora, cosiddetto a "multifascio", consisteva nel raccogliere e sommare analogicamente i segnali provenienti da ciascuna delle sezioni in cui è suddivisa l'antenna, separatamente per gli elementi del ramo Est-Ovest e per quelli del ramo N-S. Inoltre le somme venivano effettuate più volte e secondo diverse e opportune ripartizioni della fase in modo da ottenere i segnali corrispondenti a diverse direzioni simultaneamente. Venivano così sintetizzati tre fasci per il ramo E-W e cinque fasci per il ramo N-S; l'ultima operazione era quella di correlare ogni fascio E-W con ogni fascio N-S, ottenendo in definitiva una immagine simultanea del cielo costituita da 15 punti.

L'introduzione nel sistema di acquisizione dati di un elaboratore elettronico "on-line" ( un Selenia GP16, dimensionato attualmente a circa 16000 voci di memoria e con la possibilità di gestire un numero praticamente illimitato di canali di input-output) ha notevolmente potenziato le capacità del radiotelescopio, rendendo possibile lo sfruttamento integrale dell'informazione radioastronomica fornita dallo strumento. A questo scopo il nuovo criterio di formazione dell'immagine prevede la codifica separata e simultanea di tutti gli interferometri possibili fra ciascuna sezione del ramo E-W con ciascuna sezione del ramo N-S. La sintesi del fascio d'antenna ( o dei diversi fasci d'antenna a secondo delle particolari esigenze della ricerca in corso) verrà effettuata digitalmente in un secondo momento dall'elaboratore elettronico. Questo rende indubbiamente più ampie le possibilità d'uso del

radiotelescopio; inoltre il nuovo sistema offre notevoli vantaggi per quanto riguarda la manutenzione dello strumento, perché permette la calibrazione continua in ampiezza e fase di ciascuna sezione dell'antenna e la correzione a posteriori di eventuali variazioni. Un altro vantaggio, tutt'altro che trascurabile, che il nuovo sistema presenta rispetto al "multifascio", consiste nella possibilità di filtrare separatamente il rumore in ciascuna risposta interferometrica, prima di sintetizzare il fascio d'antenna: questo, a conti fatti, porta a un miglioramento nel rapporto segnale-rumore di circa un fattore 2.

Attualmente il ramo N-S è costituito da 8 sezioni, mentre, come è noto, le sezioni del ramo E-W sono 6; il numero di interferometri risultanti previsti dal nuovo sistema è quindi 48. Inoltre, per ogni interferometro occorre registrare separatamente l'informazione "coseno" e l'informazione "seno" per poter ricavare in ogni istante l'ampiezza e la fase del segnale; ne risulta che è necessario codificare simultaneamente 96 uscite indipendenti. Questo fatto d'altra parte pone il problema di limitare all'essenziale la quantità complessiva dei dati raccolti, in modo da non creare serie difficoltà di tipo economico e organizzativo nella successiva elaborazione, difficoltà che vanificherebbero del tutto i vantaggi ottenuti. L'assunto fondamentale infatti è che un sistema è realmente vantaggioso e efficiente rispetto a un altro se l'aumento complessivo di dati raccolti corrisponde solo a un reale aumento dell'informazione. Nel nostro caso il numero di canali di uscita risulta moltiplicato di circa un fattore 6 rispetto a quello usato per il "multifascio". Ogni altra considerazione sui vantaggi ottenuti con il nuovo sistema ha quindi senso solo se può essere aumentato dello stesso fattore

l'intervallo di campionamento nella codifica dei dati di ciascun canale, ovviamente senza che vi sia perdita di informazione. Come è noto, questo è tanto più possibile quanto più il segnale da codificare è lentamente variabile nel tempo. L'inseguimento di frangia, eliminando già prima della codifica il termine rapidamente variabile della risposta interferometrica, permette di soddisfare pienamente all'esigenza richiesta e in questo senso costituisce parte integrante e essenziale del nuovo sistema di acquisizione dei dati.

## 2 - Considerazioni generali sulla risposta di un interferometro

In questa sezione ci proponiamo di analizzare la risposta di un interferometro in funzione dei diversi parametri del sistema. Faremo alcune ipotesi esemplificatrici che non alterano la sostanza delle condizioni in cui il sistema si troverà realmente a lavorare: anzitutto assumiamo che il segnale raccolto sia monocromatico (il che equivale a supporre che i ritardi siano ben compensati in rapporto alla larghezza di banda del segnale). Inoltre supponiamo che la sorgente sia puntiforme e isolata (cioè supponiamo che l'estensione reale della sorgente sia piccola rispetto al fascio d'antenna): il caso di una distribuzione qualsiasi di brillantezza non altera i termini del problema in quanto una distribuzione di brillantezza può essere sempre considerata come una combinazione lineare di sorgenti puntiformi. Infine ci proponiamo di trattare solo il caso unidimensionale, sufficiente per l'esame degli effetti introdotti dall'inseguimento di frangia: infatti, puntate le antenne a una certa declinazione, la risposta dell'interferometro diventa funzione solo dell'angolo orario

della sorgente e cioè, per effetto della rotazione della Terra, funzione solo del tempo siderale.

Nelle formulazioni matematiche useremo la simbologia dei numeri complessi; questa infatti offre il vantaggio di rappresentare in una sola volta la risposta di tipo "coseno" (parte reale) e quella di tipo "seno" (parte immaginaria).

In queste ipotesi, la risposta teorica  $R$  di un interferometro è data dalla relazione :

$$R(\theta) = A(\theta) e^{2\pi i (b\theta + \varphi)} \quad (1)$$

Dove :

- $\theta$  è l'angolo orario della sorgente
- $b$  è la proiezione nella direzione E-W della distanza fra i centri elettrici dei due elementi dell'interferometro ( detta "baseline" )
- $\varphi$  è la differenza di cammino elettrico nelle due linee (  $b$  e  $\varphi$  sono dei numeri puri, in quanto si intendono misurati rispetto alla lunghezza d'onda del segnale nel vuoto: nel nostro caso la frequenza centrale di lavoro è 408 MHz e quindi la lunghezza d'onda nel vuoto è 73.5 cm.)

La funzione  $A(\theta)$  è il prodotto delle risposte in tensione nella direzione E-W dei due elementi di interferometro. Nel nostro caso  $A(\theta)$  è esplicitata con buona approssimazione dalla formula:

$$A(\theta) = G \frac{\sin \pi L_1 \theta}{\pi L_1 \theta} \cdot \frac{\sin \pi L_2 \theta}{\pi L_2 \theta} \quad (2)$$

dove  $G$  è una costante che dipende dal flusso della sorgente e dal guadagno del sistema;  $L_1$  e  $L_2$  sono le dimensioni lineari in direzione E-W (sempre in unità di lunghezza d'onda) dei due elementi dell'interferometro.

In particolare si ha:

$$L_1 = 128 \quad \text{per l'elemento del ramo E-W}$$

$$L_2 = 32 \quad \text{per l'elemento del ramo N-S}$$

Poiché il nostro radiotelescopio è uno strumento di transito meridiano, l'angolo orario  $\theta$  è funzione lineare del tempo siderale e precisamente:  $\theta = (t - \alpha) \cos \delta / 13751 \quad (3)$

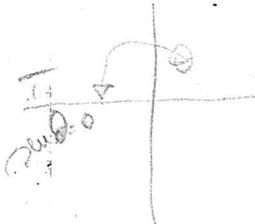
Dove:  $t$  e  $\alpha$  sono rispettivamente il tempo siderale e l'ascensione retta della sorgente, entrambi misurati in secondi siderali;  $\delta$  è la declinazione della sorgente (che possiamo identificare con la stessa declinazione a cui sono puntate le antenne); il numero 13751 è il coefficiente di trasformazione da radianti a secondi di tempo.

Per cui, combinando le (1), (2) e (3), la risposta di un interferometro fra una sezione del ramo E-W e una del ramo N-S è una funzione del tempo siderale  $t$  nella forma:

$$R(t) = G \frac{\sin[\pi L_1(t-\alpha)\cos\delta/13751]}{\pi L_1(t-\alpha)\cos\delta/13751} \cdot \frac{\sin[\pi L_2(t-\alpha)\cos\delta/13751]}{\pi L_2(t-\alpha)\cos\delta/13751} \times e^{2\pi i[b\cos\delta/13751 \cdot (t-\alpha) + \varphi]} \quad (4)$$

L'espressione (4) si può considerare costituita dal prodotto di due parti: la prima (quella che moltiplica l'esponenziale) fornisce, attraverso il termine  $G$ , l'informazione sull'intensità del segnale e quindi sul flusso della sorgente. Come funzione del tempo ha la forma del fascio primario di antenna, centrato nella posizione  $\alpha$  della sorgente, e varia molto lentamente in rapporto all'intervallo di tempo previsto per il campionamento dei dati; infatti il primo zero di tale funzione si ha quando:

$$\pi L_1(t-\alpha)\cos\delta/13751 = \pi \quad , \text{ da cui risulta : } t - \alpha > 107 \text{ sec.}$$



La seconda parte della (4), cioè l'esponenziale, viene detta "frangia" della risposta interferometrica ed è una funzione sinusoidale del tempo con frequenza:  $b \cos \delta / 13751$  e fase iniziale:  $\varphi - \alpha b \cos \delta / 13751$ . Analizzando questi termini si comprende bene che la fase iniziale fornisce l'informazione sulla posizione ( $\alpha$ ) della sorgente, mentre la frequenza dipende solo da parametri strumentali, come la "baseline" (b) e il puntamento delle antenne ( $\delta$ ). La frequenza di frangia quindi non contiene alcuna informazione radioastronomica e ha il solo effetto (dannoso) di rendere la risposta interferometrica rapidamente variabile nel tempo. Di conseguenza, per non alterare in modo sensibile il segnale in uscita, bisogna tenere artificiosamente bassa la costante di tempo nell'integrazione analogica, e quindi, dato l'elevato rumore residuo, effettuare la codifica a intervalli di tempo molto brevi. Il risultato finale è un numero di dati in uscita eccessivamente ridondante rispetto all'informazione trasmessa. Il sistema a inseguimento di frangia ha lo scopo di eliminare la necessità di questa ridondanza, riducendo o al limite annullando la frequenza di frangia della risposta interferometrica.

### 3 - Modifiche della risposta interferometrica introdotte dall'inseguimento di frangia e analisi in termini di Trasformate di Fourier

Nella parte riguardante la frangia della risposta interferometrica, data dalla (4), compare un termine ( $\varphi$ ) che rappresenta in numeri d'onda la differenza di cammino elettrico nelle due linee di trasmissione dell'interferometro. Operare l'inseguimento

di frangia significa rendere tale termine linearmente variabile in funzione del tempo. Questo può essere realizzato in pratica inserendo in una delle due linee di trasmissione uno sfasatore in grado di produrre una rotazione della fase con velocità prefissata e costante. Detta  $f$  tale velocità, il termine  $\varphi$  diventa:  $\varphi = \varphi_0 + ft$  e la frequenza di frangia della risposta assume il valore:  $b \cos \mathcal{J} / 13751 + f$ . In tal modo, imponendo un certo valore di  $f$  per ogni interferometro, si può alterare a piacimento la frequenza delle frange. In particolare, se si pone :

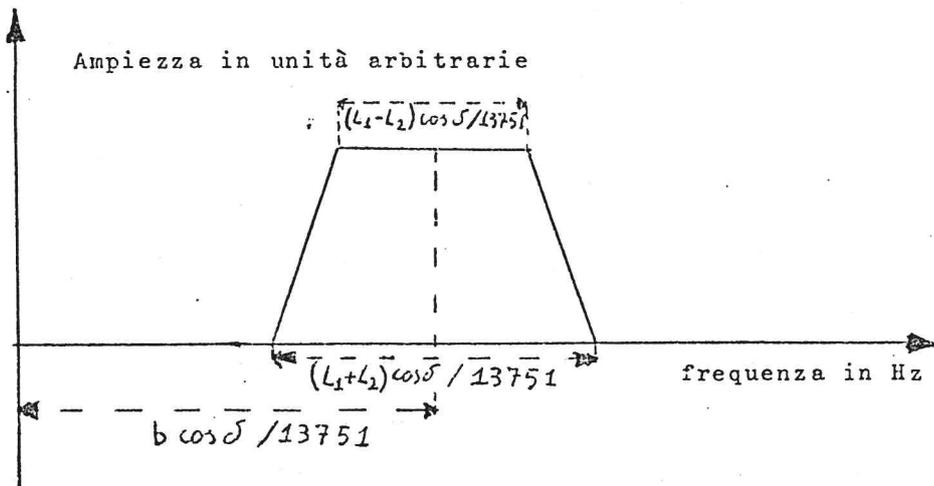
$$f = - b \cos \mathcal{J} / 13751 \quad (5)$$

si produce l'arresto completo delle frange ("fringe stopping"), ottenendo così che resti un unico termine funzione del tempo, quello di ampiezza, che, come abbiamo visto, è a variazione molto lenta. Ovviamente l'informazione sulla fase resta inalterata ed è ricavabile (come nel caso in cui non si operi l'inseguimento) dal rapporto fra la parte immaginaria e la parte reale della (4), cioè fra la risposta "seno" e la risposta "coseno" dell'interferometro.

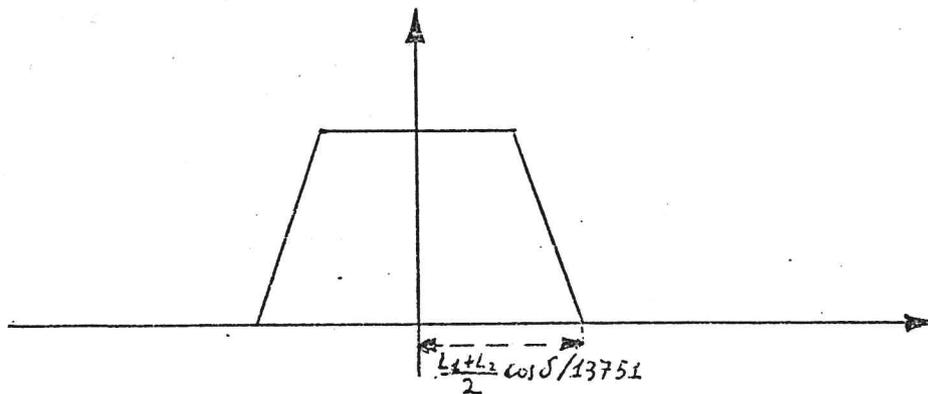
Per meglio chiarire il significato delle modifiche introdotte dall'inseguimento di frangia e in che senso questo permetta la possibilità di eseguire il campionamento dei dati a intervalli di tempo sufficientemente lunghi, è utile analizzare la risposta interferometrica in termini di componenti di Fourier. A questo scopo calcoliamo la Trasformata di Fourier della  $R(t)$ , data dalla (4). Per definizione, si ha (indicando con  $\nu$  la frequenza e con  $\bar{R}(\nu)$  la funzione che risulta) :

$$\bar{R}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(t) e^{-2\pi i \nu t} dt$$

Eseguito il calcolo dell'integrale, l'ampiezza della  $\overline{R(\nu)}$  risulta una funzione che ha la forma di un trapezio isoscele, con base minore  $(L_1 - L_2) \cos \delta / 13751$  e base maggiore  $(L_1 + L_2) \cos \delta / 13751$ , centrato sulla frequenza di frangia  $b \cos \delta / 13751$ , come appare chiaro dalla fig. 1 :



Abbiamo detto d'altra parte che, operando il "fringe stopping", si ha l'effetto di annullare la frequenza di frangia. Questo significa riportare a zero sull'asse delle frequenze il centro della figura di risposta dell'interferometro ( fig. 2 )



Come si vede dalla figura, la massima frequenza presente nel

segnale é :  $\nu_{max} = \frac{L_1 + L_2}{2} \cos \delta / 13751$

$\nu_{max}$  é detta "frequenza di taglio". Esiste a questo proposito un teorema, il quale afferma che non si perde nulla dell'informazione se la conversione analogico-digitale viene effettuata a intervalli di tempo che non superino :  $1 / 2 \nu_{max}$ .

Nel nostro caso questo significa che tutta l'informazione radioastronomica é ricavabile da un numero discreto di misure del segnale in uscita, purché detto c l'intervallo di campionamento, sia al massimo :  $c = 1/2 \nu_{max} = 86 / \cos \delta$  sec.

In realtà la presenza del rumore strumentale, che sempre si sovrappone al segnale radioastronomico, complica notevolmente il problema, per il fatto che le componenti del rumore residuo dopo l'integrazione si estendono a frequenze che vanno ben oltre la frequenza di taglio del segnale. L'ampiezza di tali componenti è data (in modo statistico) dalla funzione di trasferimento del filtro integratore che é :  $T(\nu) = 1 / \sqrt{1 + (2\pi \tau \nu)^2}$  , dove  $\tau$  é la costante di tempo. Come si può vedere questa funzione tende a zero per  $\nu$  tendente all'infinito; non essendovi quindi una "frequenza di taglio", non é possibile trasferire tutta l'informazione in dati numerici, comunque piccolo si scelga l'intervallo di campionamento. Questo fa sì che la codifica provochi sempre un'amplificazione del rumore originale, tanto più accentuata quanto più grande é il rapporto fra l'intervallo di campionamento e la costante di tempo. Tuttavia, finché c non é maggiore di  $\tau$  , l'aumento di rumore può considerarsi ancora contenuto entro limiti accettabili. Il problema si sposta quindi sulla necessità di scegliere opportunamente la costante di tempo  $\tau$  , in maniera

ciò che l'integrazione non alteri in modo sensibile il segnale radioastronomico. In termini di Trasformate di Fourier questo significa che la funzione di trasferimento del filtro integratore,  $T(\nu)$ , deve mantenersi costante, cioè uguale a 1, fino a  $\nu_{max}$ . Se si pone  $\tau = 8$  sec., si ha (nel caso più sfavorevole, cioè per  $\sigma = 0$ ) :

$$T(\nu_{max}) = 1 / \sqrt{1 + (8\pi(L_1+L_2)/13751)^2} \simeq 0.96$$

Questo risultato si può ancora considerare accettabile, per cui è stato di scelto di porre a 8 sec. la costante di tempo degli integratori; di conseguenza pure a 8 sec. è stato fissato l'intervallo di campionamento dei dati. Poiché, come abbiamo detto, nel nuovo sistema di acquisizione dei dati si dispone di 96 canali di uscita, risulta che devono essere memorizzati in media 12 dati al secondo, un numero cioè che è addirittura inferiore a quello usato per il "multifascio" (15 dati al secondo), nonostante la maggiore quantità di informazione raccolta.

#### 4 - Realizzazione del sistema

Nella precedente sezione abbiamo detto che operare l'inserimento di frangia significa rendere variabile nel tempo, secondo una legge opportuna, la differenza di cammino nelle due linee di trasmissione del segnale, per ognuno dei 48 interferometri. In realtà, per ottenere questo, è sufficiente inserire gli sfasatori solo nelle linee dei 6 canali E-W. Infatti tutti gli interferometri fra i diversi canali N-S e lo stesso canale E-W presentano la stessa frequenza di frangia, avendo tutti la

medesima "baseline" in direzione E-W. Il sistema é quindi costituito da 6 sfasatori, uno per ogni canale E-W, inseriti nelle catene a media frequenza del segnale (30 MHz).

Il compito dell'elaboratore elettronico é di determinare anzitutto, sulla base della declinazione e delle 6 "baselines" che gli vengono forniti come dati di ingresso, i 6 periodi delle frange. Successivamente, durante la registrazione dei dati, l'elaboratore dovrà comunicare, contemporaneamente ai 6 sfasatori, i comandi per eseguire la rotazione della fase, con il periodo che compete a ciascuno di essi.

Dopo varie prove, eseguite su prototipi di diverso genere, e anche tenendo conto delle possibilità generali di lavoro dell'elaboratore, si é deciso che sfasatori a funzionamento digitale fossero i più idonei per affidabilità e facilità di realizzazione. Ciascuno sfasatore é costituito da 6 cavi di lunghezza decrescente in progressione binaria ( $1/2, 1/4, \dots, 1/64$ , sempre in unità di lunghezza d'onda); i cavi possono essere inseriti o meno nella linea di trasmissione del segnale, su comando proveniente dall'elaboratore. Il sistema binario così realizzato permette di ottenere tutte le combinazioni di fase comprese fra  $0^\circ$  e  $63/64$  ( $\sim 354^\circ$ ), a "step" di  $1/64$  ( $5^\circ.625$ ). In questo modo, se l'elaboratore fornisce in ogni istante e per ogni sfasatore l'informazione di fase sotto forma di numero intero in unità di  $1/64$  di angolo giro, il segnale logico (0-5 Volts), relativo a ciascuna delle 6 cifre binarie meno significative di tale numero, é lo stesso che comanda

l'inserimento o meno del cavo corrispondente nello sfasatore.

Un sistema di questo genere ha il grande vantaggio di rendere molto agevole e rapido il governo dell'elaboratore; presenta tuttavia l'inconveniente di introdurre delle armoniche spurie nella risposta finale, per il fatto che la fase non varia con continuità, ma a "step" di  $1/64$ : valuteremo nella prossima sezione l'effetto prodotto da queste armoniche e vedremo che in certe condizioni esso è largamente contenuto entro limiti accettabili.

Per governare contemporaneamente tutti e 6 gli sfasatori, per i quali l'aggiornamento della fase avviene in generale a istanti diversi, è stato realizzato un sistema che ha il compito di decodificare l'informazione proveniente dall'elaboratore e abilitare di volta in volta solo lo sfasatore interessato. In questo modo risulta notevolmente semplificata la cavistica necessaria per l'instradamento dell'informazione, che dall'elaboratore giunge al sistema attraverso 9 canali in tutto (fig.3). Di questi, 6 recano, come abbiamo visto, le cifre binarie della fase espressa in unità di  $1/64$  di angolo giro; i rimanenti 3 "bit" rappresentano un numero, compreso fra 1 e 6, che identifica lo sfasatore a cui trasferire l'informazione. Il sistema è inoltre provvisto di un "clock" interno che genera un treno di impulsi con periodo di 2 microsecondi (fig.4). A ogni impulso il numero di identificazione dello sfasatore viene confrontato con il valore memorizzato in precedenza. Finché questo numero resta invariato non si ha alcuna azione da parte del sistema e gli sfasatori conservano la fase precedentemente assunta.

oster di fase

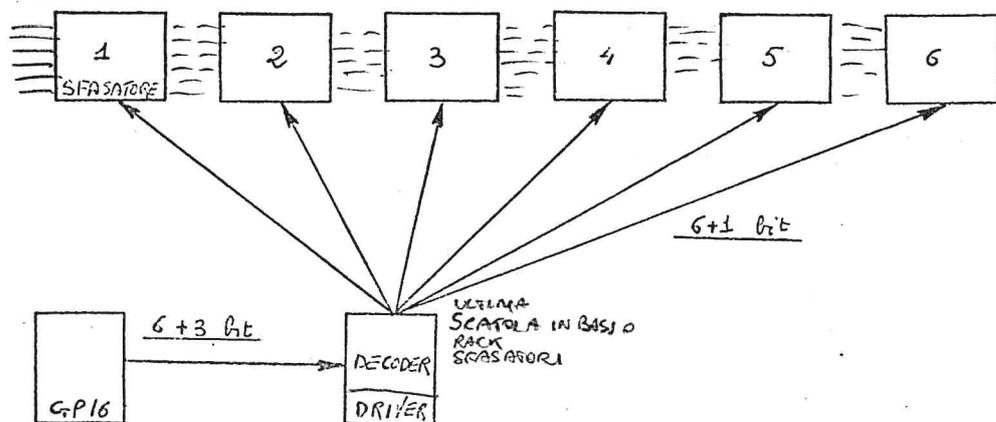
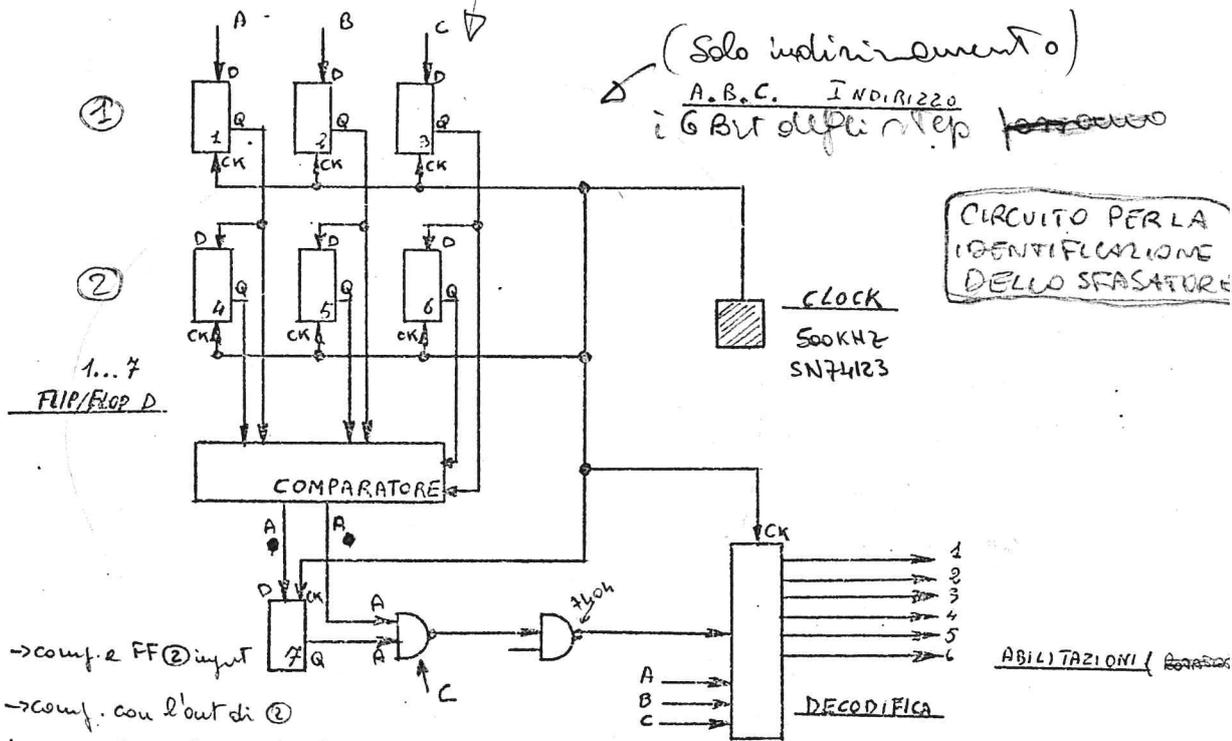


FIG 3 SCHEMA A BLOCCHI



CIRCUITO PER LA IDENTIFICAZIONE DELLO SFASATORE

- I ciclo ABC → comp. e FF ② input
- II ciclo ABC → comp. con l'out di ②
- III ciclo le due uscite A (queli) vengono presentate in C (il FF 7 serve per spegnere un altro ciclo prima di obliare (?))

FIG 4 DECODIFICA E DRIVER

Non appena il numero di identificazione dello sfasatore cambia, il sistema memorizza il nuovo numero; attende poi altri due periodi di "clock" controllando che tale numero rimanga inalterato e assicurandosi così che il precedente cambiamento non fosse dovuto a eventuali impulsi spuri; dopodiché trasmette allo sfasatore identificato il nuovo valore della fase. In questo modo il tempo in cui l'elaboratore resta impegnato per governare lo inseguimento di frangia è ridotto al minimo: interverrà solo per comandare (a istanti opportuni) l'aggiornamento della fase in uno dei 6 sfasatori, restando libero, nell'intervallo di tempo compreso fra un aggiornamento e l'altro, per il lavoro generale di acquisizione e preelaborazione dei dati.

Gli elementi sfasatori veri e propri sono dotati di un sistema di taratura che rende possibile l'inserimento dei cavi senza che questo produca una variazione di ampiezza del segnale. Dalla fig. 5 si nota che il sistema di inserzione o meno dei cavi è stato ottenuto mediante commutazione a diodi. Sfruttando la non linearità degli stessi è stata ottenuta anche l'equalizzazione delle ampiezze. Come si può notare la richiusura delle correnti in continua passa attraverso un potenziometro che "sbilancia" i due percorsi. E' così ottenibile, sul lato dove non è inserito il cavo, la necessaria attenuazione. I transistori inseriti fra uno stadio e l'altro hanno il compito di disaccoppiare i diversi stadi per evitare riflessioni dovute a disadattamenti. Il ponte di diodi è pilotato da un sistema in grado di convertire i segnali logici 0 - 5 Volts in -12 Volts, +12 Volts, assicurando così gli stati saturo e interdetti del sistema.



Tutto il sistema é così formato dalla messa in cascata di 6 elementi uguali ( a parte la lunghezza dei cavi ).

Poiché le caratteristiche richieste sono tali da non permettere un errore di ampiezza maggiore dell' 1% fra tutti gli stadi inseriti e non, e tenendo presente come sia impossibile ottenere un perfetto isolamento fra uno stadio e l'altro, risulta che la taratura di fase e quella di ampiezza del sistema non possono essere effettuate separatamente e indipendentemente per ciascuno stadio, ma devono necessariamente procedere per approssimazioni successive. Inoltre, per facilitare il raggiungimento alla fine dei valori di fase richiesta, é stato aggiunto sul punto terminale di ogni cavo un compensatore da 3-10 pF, che ha l'effetto di allungare artificialmente il cavo e permettere così una regolazione fine della fase.

##### 5 - Valutazione degli effetti di approssimazione

E' stato detto che per ottenere l'inseguimento di frangia la fase deve variare nel tempo secondo la legge:

$$\varphi = \varphi_0 + ft$$

( dove  $f = -b \cos \delta / 13751$  nel caso particolare del "fringe-stopping" ). Questo fa sì che la risposta  $R_i(t)$  del telescopio divenga :

$$R_i(t) = R(t) e^{2\pi i f t}$$

dove  $R(t)$  é la risposta, data dalla (4), in assenza di inseguimento. In realtà, adottando il sistema descritto nella sezione

precedente, la fase non varia con continuità, ma a "step" di  $1/64$  del periodo. La risposta del radiotelescopio sarà quindi data in generale dall'espressione :

$$R_1'(t) = R(t) F(t)$$

Il nostro scopo è di fornire una formulazione matematica della  $F(t)$  nel caso reale e di valutare di conseguenza quanto la risposta  $R_1'(t)$  differisca dalla  $R_1(t)$  teorica. A questo scopo introduciamo la funzione a "gradino", indicata col simbolo  $\Pi(x)$  e avente il significato che segue :

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Tramite questa funzione è possibile fornire l'espressione matematica della  $F(t)$ , che sarà data da :

$$F(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i m / 64} \Pi(64ft - m) \quad (6)$$

Come si può verificare, tale funzione è periodica con periodo  $1/f$ . E' quindi sviluppabile in serie di Fourier, cioè si può porre :

$$F(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi i n f t} \quad (7)$$

dove i coefficienti complessi  $a_n$  sono dati, a parte una costante, dall'espressione:

$$a_n = \int_0^{1/f} F(t) e^{-2\pi i n f t} dt$$

Sostituendo nell'integrale la (6) e eseguendo i calcoli, si ha (sempre a parte una costante moltiplicativa) :

$$a_n = \frac{\sin \pi n / 64}{\pi n / 64} e^{-\pi i n / 64} \sum_{0}^{63} e^{-2\pi i l (n+1) / 64}$$

La somma che figura in quest'ultima espressione è sempre nulla, salvo che per  $n+1 = 64k$ , con  $k$  intero qualsiasi, nel cui caso

la somma é 64. Tralasciando anche questa costante e ponendo  $n = 64k-1$ , il valore di  $a_n$  ( ora:  $a_k$  ) così trovato può essere sostituito nella (7). Si ha :

$$F(t) = e^{2\pi i f t} \sum_{-\infty}^{+\infty} k \frac{\sin \pi (64k-1)/64}{\pi (64k-1)/64} e^{-\pi i (64k-1)/64} e^{-2\pi i 64k f t}$$

Il termine di ampiezza può essere approssimato con 1, per  $k=0$ , e con  $1/64k$  negli altri casi. Risulta quindi, ponendo in evidenza l'armonica fondamentale, cioè il termine per  $k=0$  :

$$F(t) = e^{2\pi i f t} e^{\pi i / 64} + e^{2\pi i f t} \sum_{-\infty}^{+\infty} k \neq 0 \frac{1}{64k} e^{-\pi i (64k-1)/64} e^{-2\pi i 64k f t}$$

Analizzando quest'ultimo risultato si osserva che l'armonica fondamentale é quella che produce l'inseguimento voluto, a parte il termine costante  $e^{\pi i / 64}$  che introduce una correzione di fase uguale per tutti gli interferometri. Le armoniche superiori invece creano delle nuove "frange" che, per ogni valore di  $k$ , hanno frequenza:  $\nu_k = b \cos \mathcal{J} / 13751 + f - 64k f$  e ampiezza relativa :  $A_k = 1 / |64k|$  .

Una valutazione completa dell'effetto prodotto dalle armoniche superiori, almeno per quanto riguarda l'ampiezza del segnale, richiede che si tenga conto anche della modifica apportata alla risposta da parte del filtro analogico. L'ampiezza del segnale in uscita, per ciascuna delle armoniche superiori, é quindi in realtà data dalla relazione :

$$A_k = 1 / \sqrt{1 + (2\pi \tau \nu_k)^2} \times 1 / |64k|$$

Vediamo in quali termini numerici si traduce quest'ultimo risultato nel caso particolare del "fringe stopping", per cui si ha:

$$\nu_k = 64k b \cos \mathcal{J} / 13751$$

Risulta (approssimando la funzione  $1/\sqrt{1+x^2}$  con  $1/x$ ) :

$$A_k = \frac{13751}{2\pi^2 b \cos \mathcal{J}} \frac{1}{(64k)^2} = \frac{0.53}{\Sigma b \cos \mathcal{J}} \frac{1}{k^2}$$

Maggiorando l'ampiezza del segnale complessivo con la somma delle ampiezze, l'errore relativo  $\xi$ , dovuto alle armoniche superiori, é quindi espresso dalla relazione :

$$\xi < 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} A_k \quad , \text{ cioè :}$$

$$\xi < \frac{1.06}{\Sigma b \cos \mathcal{J}} \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 \quad , \text{ e infine, eseguendo la somma :}$$

$$\xi < 1.8 / \Sigma b \cos \mathcal{J} \quad (8)$$

La (8) fornisce un limite superiore all'effetto di distorsione prodotto dalle armoniche superiori, presenti nel segnale in uscita nel caso del "fringe-stopping". Come si può vedere, esso é inversamente proporzionale alla costante di tempo, alla "baseline" e al coseno della declinazione a cui sono puntate le antenne. La situazione più sfavorevole si ha quindi per la "baseline" più corta, cioè per quella del canale 1 Est ( $b \simeq 90$ ); ponendoci in questo caso e ricordando che la costante di tempo é 8 secondi, risulta :  $\xi < \frac{0.25}{\cos \mathcal{J}} \%$  . L'errore si mantiene quindi inferiore all' 1% fino a  $\mathcal{J} \simeq 75^\circ$  .

6 - Governo dell'elaboratore elettronico

E' stato detto che l'elaboratore ha il compito di trasmettere al sistema di decodifica, a istanti opportuni, sia la fase aggiornata come numero binario di 6 cifre, sia il numero di identificazione dello sfasatore che deve assumere quella fase e mantenerla fino all'aggiornamento successivo. I 6 programmi ( uno per ogni sfasatore) che eseguono queste semplici operazioni sono chiamati, con priorità massima, da un programma supervisore che gestisce un sistema di multiprogrammazione in tempo reale. La descrizione dettagliata di tale sistema, completamente progettato e realizzato dal Laboratorio, comparirà in un prossimo rapporto interno.

Normalmente l'elaboratore è impegnato nell'acquisizione, nel controllo e nella preelaborazione dei dati. Quando però giunge il momento, per un certo sfasatore, di aggiornare la fase ( e questo avverrà a istanti che sono multipli di  $1/64f$ ), il supervisore interrompe il programma in esecuzione e trasferisce il controllo al programma corrispondente alla sfasatore interessato. Quest'ultimo dispone di una voce di memoria in cui si trovano sia il numero della fase nei 6 bit meno significativi, sia il numero di identificazione dello sfasatore, nei bit dal decimo al dodicesimo. Il programma incrementa di 1 il contenuto di tale voce di memoria, aggiornando così la fase di  $1/64$ , annulla l'eventuale riporto sul settimo bit (in questo modo la parte che riguarda il numero dello sfasatore non viene mai alterata) e trasferisce il risultato sull'interfaccia che comunica esternamente con il sistema di decodifica. Dopodiché restituisce il

controllo al supervisore che esamina se vi sono altri sfasatori da aggiornare contemporaneamente. terminate tutte le operazioni, il supervisore comanda il rientro nel programma generale, esattamente nel punto in cui quest'ultimo era stato interrotto. Il tempo che l'elaboratore impiega per eseguire l'aggiornamento delle fasi é, nel caso più sfavorevole (cioé quando tutti i 6 sfasatori sono interessati contemporaneamente), dell'ordine del millisecondo. Poiché l'intervallo fra un aggiornamento e l'altro non é mai inferiore al decimo di secondo, ne consegue che l'inseguimento di frangia impegna l'elaboratore solo per l'1% del tempo totale a disposizione.

Nella realizzazione dell' "hardware" e del "software" del sistema si sono dovute superare alcune difficoltà marginali di ordine pratico, che qui elencheremo brevemente :

Anzitutto si é dovuto tenere conto del fatto che, essendo il ramo E-W collocato fisicamente a Est del ramo N-S ed essendo gli sfasatori inseriti nelle linee dei canali E-W, ottenere un abbassamento della frequenza di frangia (o al limite il suo annullamento con il fringe stopping) comporta far decrescere la fase in funzione del tempo. Questo discorso é tradotto matematicamente dal segno - che compare nella (5) e in tutte le espressioni in cui figura la frequenza di inseguimento. Poiché viceversa per il programma é più comodo e più rapido incrementare anziché decrementare a ogni aggiornamento il numero binario che rappresenta la fase, il problema é stato risolto trasferendo questa inversione sul sistema di decodifica. In altre parole il sistema di decodifica inserisce il cavo nello sfasatore abi-

litato se la cifra binaria corrispondente che gli viene trasmessa é 0 e lo disinserisce se la cifra é 1. In questo modo la fase zero per l'elaboratore corrisponde in realtà all'inserimento di tutti i cavi e cioè a un allungamento delle linee dei canali E-W di 63/64 di lunghezza d'onda. E' chiaro che questo non influisce sui risultati finali, in quanto in ogni caso la lunghezza complessiva delle linee non é nota a priori e deve essere determinata da misure astronomiche e strumentali, le quali verranno eseguite ovviamente nelle stesse condizioni.

Un altro piccolo problema che si é dovuto risolvere é il seguente: il sistema di decodifica, come abbiamo detto, trasmette allo sfasatore l'ordine di aggiornare la fase solo se registra contemporaneamente una variazione del numero di canale; questo comporta che, se la fase deve essere aggiornata due volte consecutive sullo stesso canale, il secondo ordine non viene eseguito. D'altra parte questa eventualità non é affatto esclusa, anzi si verifica spesso per il canale in cui la fase varia più velocemente, cioè per il canale 6 Est, che ha la massima "baseline" e quindi la massima frequenza di frangia. Questo inconveniente é stato risolto a "software", rendendo cioè leggermente diverso dagli altri cinque il programma che governa lo sfasatore del canale 6 Est. Precisamente é stata inserita, all'inizio del programma, un'istruzione di macchina che simula l'aggiornamento della fase su un inesistente canale zero; immediatamente dopo, quando giunge l'istruzione corretta, il sistema di decodifica (che ha memorizzato il canale zero come indirizzo precedente) sente una nuova variazione del numero di canale e tra-

smette allo sfasatore del canale 6 l'ordine di aggiornare la fase. Questo piccolo trucco consente in qualunque situazione il corretto funzionamento del sistema e comporta, con una istruzione di macchina in più, una perdita di tempo di soli 4 microsecondi. Una soluzione alternativa, ma certamente più dispendiosa, sarebbe stata quella di dotare il sistema di decodifica di un comparatore a 9 bit, anziché a 3, rendendolo così in grado di avvertire un cambiamento, non solo del numero di canale, ma anche della fase.

Infine vorremmo fissare l'attenzione su un punto essenziale per la corretta interpretazione dei dati risultanti dall'inseguimento di frangia. Abbiamo detto che i programmi che hanno il compito di comandare l'aggiornamento della fase funzionano sotto il controllo di un generale sistema "real-time". Ciascuno di essi è chiamato in esecuzione automaticamente a intervalli di tempo prefissati, precisamente ogni :  $\Delta t = 1/64f$  secondi. In realtà, poiché il funzionamento del sistema "real-time" è regolato sulla base di una successione di impulsi che pervengono all'elaboratore da un orologio siderale esterno a intervalli di 2 millisecondi, qualunque tempo usato dall'elaboratore non potrà essere che un multiplo intero di questa quantità. In particolare la durata reale  $\Delta t'$  di uno "step" di fase sarà:

$\Delta t' = 0.002 k$  secondi, dove  $k$  è un numero intero scelto in modo che la differenza  $|\Delta t - \Delta t'|$  sia minima. In pratica, noti i 6 valori di  $f$ , l'elaboratore sceglie i 6 corrispondenti valori di  $k$ , con cui predispone il sistema alla chiamata automatica dei programmi, chiamata che sarà quindi eseguita ogni  $k$  conteggi

degli impulsi dell'orologio siderale. Ciascun valore di  $k$  é determinato semplicemente arrotondando il rapporto  $\frac{1/64f}{0.002}$  al numero intero piú vicino. In simboli questo significa :

$$\left| \frac{1}{0.128 f} - k \right| \leq 1/2$$

Corrispondentemente la frequenza reale di inseguimento,  $f'$ , risulta :  $f' = \frac{1}{64\Delta t'} = \frac{1}{0.128k}$

Ne consegue la relazione :

$$\left| \frac{1}{0.128f} - \frac{1}{0.128f'} \right| \leq 1/2$$

cioé (approssimando  $ff'$  con  $f^2$ ) :

$$|f' - f| \leq 0.064f^2$$

La massima differenza fra la frequenza realmente usata e quella imposta é quindi proporzionale al quadrato della frequenza stessa. Nel caso particolare del "fringe stopping" si ha:

$$|f' - f| \leq \frac{b^2 \cos^2 \theta}{13751^2} 0.064$$

Se ci poniamo nelle condizioni piú sfavorevoli, cioé per  $\theta=0^\circ$  e per la massima "baseline" (quella del canale 6 Est, per cui si ha  $b \approx 730$ ), otteniamo :

$$|f' - f| \leq 0.00018 \text{ hz}$$

Benché questa differenza sembri a prima vista molto piccola, é sufficiente a chiarire che la frequenza da usarsi nella successiva sintesi del fascio é la  $f'$  e non la  $f$ ; la scelta con-

traria introdurrebbe infatti un errore della fase cumulativo nel tempo, errore che per esempio raggiungerebbe i  $10^0$  dopo solo 2 minuti e mezzo dall'istante iniziale.

Invece, per quanto riguarda i risultati di altre operazioni, come per esempio quella di un filtraggio digitale dei dati, la suddetta differenza non produce alcun effetto apprezzabile.

#### 7 - Conclusioni

Pur non essendo ancora operante a tutt'oggi il ramo N-S del radiotelescopio, il sistema a inseguimento di frangia é stato ampiamente collaudato sia dal punto di vista elettronico che astronomico. In particolare sono stati allestiti provvisoriamente alcuni interferometri fra i diversi canali dello stesso ramo E-W, inserendo gli sfasatori da una delle due parti di ciascun interferometro. In fig. 6 é riportata l'immagine interferometrica di una radiosorgente ( 3C 123) quale appare senza inseguimento di frangia (fig. 6a) e con il "fringe stopping" (fig. 6b).

Inoltre, l'uso dell'elaboratore ha permesso di mettere a punto il sistema con grande precisione, specialmente per quanto riguarda la regolazione in ampiezza e fase di ciascuno dei 6 stadi di cui é costituito uno sfasatore: un programma-test legge i dati corrispondenti a ciascuna delle 64 possibili configurazioni di fase, in risposta a un segnale a 30MHz iniettato nelle linee, e determina, attraverso un procedimento di "best-fit", il contributo fornito in ampiezza e fase da ciascuno dei 6 stadi.

I risultati sono molto precisi: da misure eseguite in giorni diversi e con diversi correlatori si deduce che il metodo permette di determinare differenze fra uno stadio e l'altro dell'ordine di qualche per mille in ampiezza e del decimo di grado in fase.