

PROGRAMMA FORTRAN IV PER IL BEST FIT DI UNA CURVA  
DI ROTAZIONE CON LE FUNZIONI DI BRANDT

G.Pieri, G.Vettolani

IRA 7/75

~~LRA 6/75~~

RIASSUNTO

Si presenta un programma FORTRAN IV per il fit della curva di rotazione di una galassia attraverso le funzioni di Brandt e per il calcolo della sua massa.

## I. INTRODUZIONE

In questo rapporto si presenta un programma FORTRAN per il fitting della curva di rotazione di una galassia spirale attraverso la curva di Brandt (1960a, 1960b) e la stima della sua massa. Le funzioni di Brandt, dipendenti dal parametro  $n$ , sono della forma

$$V(\tilde{\omega}) = \frac{A \tilde{\omega}}{1 + [(B \tilde{\omega})^n]^{3/2n}} \quad (1)$$

dove  $V(\tilde{\omega})$  ed  $\tilde{\omega}$  sono la velocità e la distanza dal nucleo della galassia, ed  $A$  e  $B$  due costanti eguali a

$$A = 3^{3/2n} V(\tilde{\omega}_{\max}) / \tilde{\omega}_{\max} \quad (2)$$

$$B = 2^{1/n} / \tilde{\omega}_{\max} \quad (3)$$

essendo  $\tilde{\omega}_{\max}$  l'ascissa del massimo della curva di rotazione.

Assumere questa forma della curva di rotazione equivale a scegliere leggi di attrazione  $Q(\tilde{\omega})$  del tipo

$$Q(\tilde{\omega}) = - \frac{A^2 \tilde{\omega}}{(1 + B^n \tilde{\omega}^n)^{3/n}} \quad (4)$$

Questa è una generalizzazione della legge di attrazione di Bottingler (1931) a cui si riduce per  $n = 3$ .

Questo modello permette un'espressione semplice della massa totale della forma

$$M_T = \frac{A^2}{GB^3} \quad (5)$$

$n = 1$  od  $n = 1.5$  sono gli esponenti comunemente usati.

Il programma è redatto in linguaggio FORTRAN IV senza utilizzare alcuna SUBROUTINE di libreria. Per il fit di una curva di rotazione con 10 punti esso utilizza una memoria di 50 Kbits e 35 secondi di tempo (octa).

sul calcolatore CDC 7200/7600 del Centro di Calcolo Interuniversitario dell'Italia Nord Orientale di Casalecchio (Bologna).

## II DESCRIZIONE PROGRAMMA

Per compiere il fit le costanti A e B vengono determinate attraverso un procedimento iterativo di minimi quadrati per funzioni non lineari (Worthing Geffner 1965). Per ogni valore del parametro n viene poi calcolata la deviazione standard del fit ottenuto.

Il tabulato del programma è mostrato in tavola I, ed il suo diagramma a blocchi in figura 1.

Riferendosi a quest'ultimo descriviamo ora il programma.

### INGRESSI

#### I Lettura

- a) Redshift della galassia in Km/sec;
- b) Angolo di inclinazione del piano della galassia sul cielo in gradi;
- c) Numero dei punti sperimentali della curva di rotazione  
(riflessa positivamente);

FORMAT (2 F 10.0, I 10)

Nota: i valori vanno perforati col punto decimale.

#### II Lettura

Distanza dal nucleo in secondi d'arco,

5 per schede

FORMAT (5F 10.0)

#### III Lettura

Velocità di rotazione osservata in Km/s, rispetto al nucleo (per la curva riflessa positivamente), 5 per scheda

FORMAT (5 F 10.0)

Il programma contiene inoltre una scheda DATA con

- a) Costante di Hubble, assunta eguale a 100 Km/sec. Mpsc.
- b) Equivalente in radianti di un secondo d'arco x 100
- c) Costante di gravitazione universale in c.g.s. pari a  $2/3 \cdot 10^{-7}$

#### TRASFORMAZIONE DELL'INPUT IN VARIABILI OMOGENEE

- a) Vengono corrette le velocità di rotazione osservate per l'angolo di inclinazione della galassia
- b) I dati sono trasformati in c.g.s.

#### STIMA DEI PARAMETRI

I parametri vengono stimati in accordo con le considerazioni svolte nell'introduzione: equazioni (2) e (3).

#### DETERMINAZIONE DEI PESI

Poichè la distribuzione ideale dei punti sperimentali sarebbe una distribuzione uniforme sull'intervallo dei valori osservati, occorre attribuire un peso capace di limitare l'influenza dei punti concentrati in un intervallo ristretto. Si è usato il seguente procedimento dati N punti sperimentali ad ogni punto compete un intervallo

$$(x) = \frac{X_{\max}}{n}$$

della variabile indipendente. Nel caso in cui in (x) si trovassero n punti si attribuisce ad ognuno di essi un peso pari a

$$w = \frac{2}{(n + 1)}$$

#### PROCEDIMENTO DI BEST FIT

Il processo di best fit è realizzato sull'inverso della funzione moltiplicato per  $^{-1}$  con la condizione di positività per i valori di A e di B anche nelle fasi intermedie del processo iterativo al fine di evitare divergenze incontrollabili del calcolatore.

Esso è realizzato dalla SUBROUTINE MING che utilizza le SUBROUTINES DERP e RIS, e la FUNCTIM F che rispettivamente:

- a) calcola le derivate numeriche delle funzioni
- b) risolve il sistema associato ai minimi quadrati
- c) calcola i valori teorici della velocità per assegnati valori della distanza dal centro e dei parametri.

#### CALCOLO DELLA MASSA

Dai parametri ottimizzati si calcola la massa come dall'equazione (5) dell'introduzione.

#### USCITE

- A) Tabella dei dati di ingresso e dei valori corretti;
- B) Per ogni valore di n (variazione da 1 a 3 con passo di 5):
  - a) Valori stimati dei parametri  $A_s$  e  $B_s$  rispettivamente;
  - b) Pesi;
  - c) Valori calcolati dei parametri  $A_k$  e  $B_k$  rispettivamente
  - d) Tabella di confronto tra dati sperimentali valori calcolati e loro scarto;
  - e) Deviazione standard sul fit (SIGMA);
  - f) Valori della massa in grammi ed in masse solari;
  - g) Grafico della curva sperimentale comparata a quella teorica. In quest'ultimo una X indica un punto sperimentale ed un  $\cdot$  un punto calcolato.

### III NOTE FINALI

Come criterio di scelta per l'esponente ottimale del fit si può ritenere che il SIGMA dia informazioni sufficientemente attendibili; inoltre la bontà del fit è qualitativamente osservabile dai grafici. I valori della massa sostanzialmente invariati dal variare del parametro  $n$  sono senz'altro da considerare più attendibili: nel caso di grandi variazioni di tale valore si può ritenere che i dati sperimentali non siano sufficientemente significativi: massimo non ben definito, punti concentrati in pochi range ristretti etc.; nel qual caso in valore indicato per la massa è da ritenere soltanto una stima grossolana.

Il programma è disponibile a richiesta perforato in codice B € D su schede standard IBM, per il fit di una curva con un massimo di 20 punti (per un numero maggiore è sufficiente modificare la scheda DIMENSIONI in testa al programma).

BIBLIOGRAFIA

Brandt 1960a, Ap.J., 131, 293.

1960b, Ap.J., 131, 553.

Bottingler 1933, Veroff.Sternv.Babelsb., 10, 2.

Worthing, A., Geffner, J., "Treatment of Experimental Data", Wiley & Sons,  
New York, 1965.



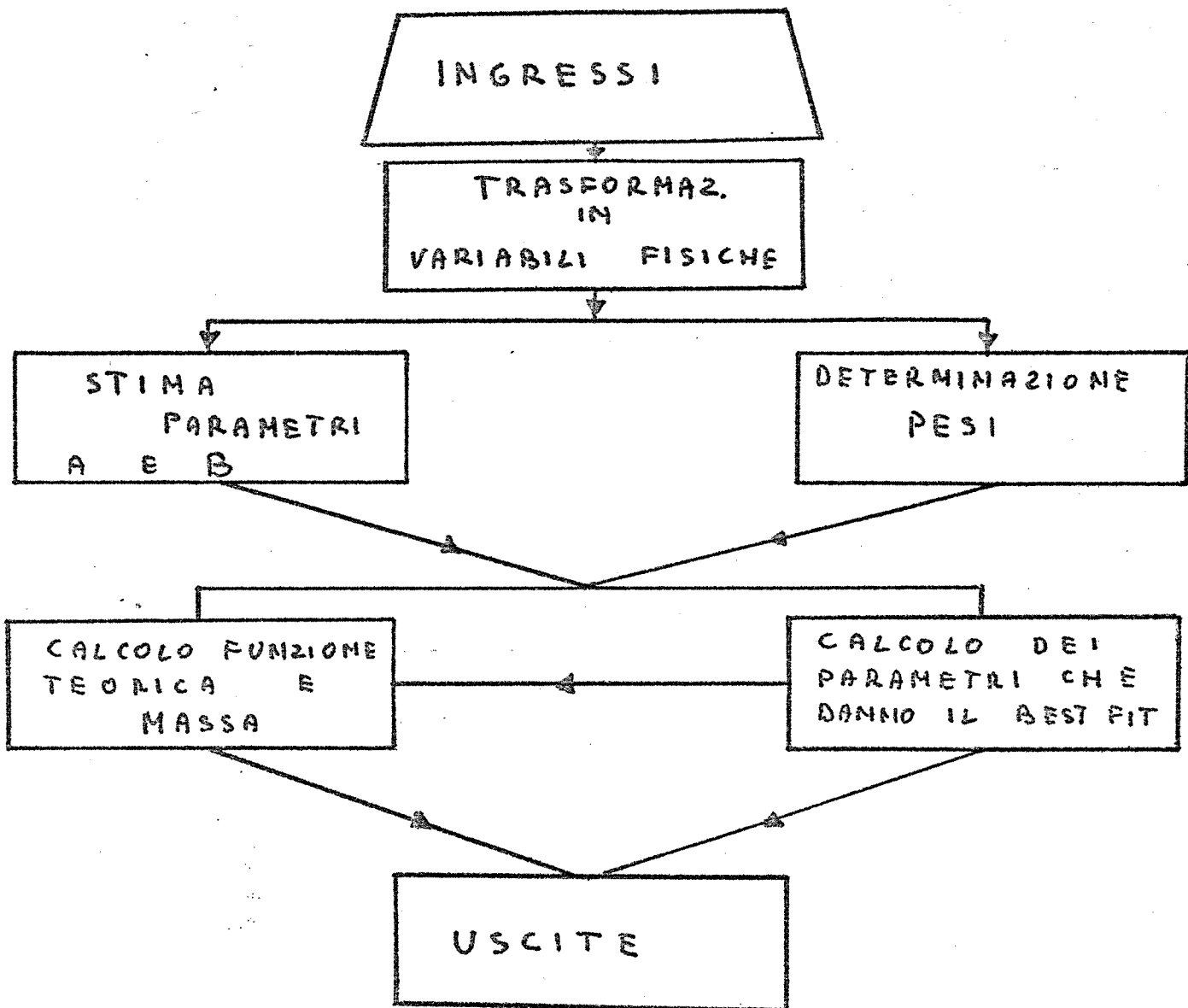


Fig. 1

```

PROGRAM MASSA(INPUT,OUTPUT,TAPE5=INPUT,TAPE6=OUTPUT)
EXTERNAL RDA
DIMENSION PNUM(20),VOSS(20),PNUMP(20),VREC(20),SK(10),WP(20),
IAK(10),YT(20),SCAR(20),YF(20)
READ(5,100)REDSH,MIN,NTP,NPAR
READ(5,110)(PNUM(J),J=1,NTP)
READ(5,110)(VOSS(J),J=1,NTP)
DATA UR00,CTPS,GRAC0/100.,4.85652*0.666666E-7/
C DATI TRASFORMATI IN C.G.S.
ANIN=ANIN*0.0174533
PC=CTPS*REDSH/UR00*3.E18
VC=(1./SIN(ANIN))*1.E5
DO1J=1,NTP
PNUMP(J)=PNUM(J)*PC
VREC(J)=VOSS(J)*VC
1 CONTINUE
C TABELLA DEI DATI
ENN=1.
WRITE(6,200)
WRITE(6,210)((PNUM(J),PNUMP(J),VOSS(J),VREC(J)),J=1,NTP)
WRITE(6,200)
DO11L=1,5
WRITE(6,220)ENN
C STIMA DEI PARAMETRI
K1=1
CALLORDER(VREC,K1,NTP,JMAX,JNTN,KMAX,KMIN)
RS1=(2**((1/ENN)/PNUMP(JMAX)))
AS1=(3**((3./((2.*ENN))))*(VREC(JMAX)/PNUMP(JMAX)))
WRITE(6,230)AS1,RS1
SK(1)=AS1
SK(2)=RS1
C DETERMINAZIONE DEI PESI
DX=PNUMP(NTP)/NTP
NPP=1
A=0.
B=0.
MNN=NTP+1
DO2J=1,MNN
IV=0
DO3I=1,NTP
IF((PNUMP(I).LE.B).AND.(PNUMP(I).GT.A))IV=IV+1
CONTINUE
IF(IV.EQ.0)GOTO10
KK=(NPP+IV-1)
DO4L=NPP,KK
SS=(IV+1)*1.
WP(L)=2./SS
CONTINUE
NPP=KK+1
10 CONTINUE
A=A+DX
B=B+DX
CONTINUE
WRITE(6,270)(WP(L),L=1,NTP)
C CALCOLO DEI PARAMETRI AK
DO7L=1,NTP
YF(L)=PNUMP(L)/VREC(L)

```

```
CALL MINO( YF, PNUMP, SK, NTP, NPAR, ENN, WP, AK)
WRITE(6,290) AK(1), AK(2)
60      C TAVOLA DEI VALORI DELLA FUNZIONE
      SIG=0.
      DOSI=1, NTP
      YT(I)=BPA(AK, PNUMP(I), ENN)
      SCAR(I)=YT(I)-VREC(I)
65      SIG=SIG+(SCAR(I))**2
      5 CONTINUE
      SIGMA=SQRT(SIG/NTP)
      WRITE(6,235)
70      WRITE(6,240)((PNUMP(I), VREC(I), YT(I), SCAR(I)), I=1, NTP)
      WRITE(6,250) SIGMA
      AMASS=(AK(1)**2)/(GRACO*(AK(2)**3))
      SMASS=AMASS/(2*1E33)
      WRITE(6,260) AMASS, SMASS
75      XMM=PNUMP(NTP)*1.5
      CALL GRAPH(XMM, 0., NTP, 60, AK, ENN, VREC, PNUMP, 120)
      ENN=ENN+1, 5
      11 CONTINUE
100     FORMAT(F10.0, F10.0, I10, I10)
110     FORMAT(5(F10.0))
80      200     FORMAT(1H1, ///, 20X, *TAVOLA DEI VALORI SPERIMENTALI E CORRETTI*
      1///, 10X, *P. SEC*20X, *P. CM*10X, *V. KM/S*15X, *V. COR. CM/S*, //)
210     FORMAT(10X, F6.2, 10X, E15.5, 10X, F6.2, 10X, E15.5)
220     FORMAT(10(/), 10X, *ESPONENTE = *, F7.5)
230     FORMAT(///, 10X, *AS=*E11.5, 10X, *BS=*, F11.5)
85      235     FORMAT(1H1, 10(/), 10X, *RAGGIO*11X, *VELOCITA*9X, *VEL. CALCOL.*7X,
      *SCARTE*)
240     FORMAT(/, 10X, 4(E15.5, 2X))
250     FORMAT(F(//), 10X, *SIGMA = *, E11.5)
260     FORMAT(F(//), 2(10X, *MASSA = *, E11.5))
90      270     FORMAT(F(//), 10X, *PESI*//, (10X, 5(F6.3, 3X)))
280     FORMAT(F(//), 10X, *AK = *, E11.5, 10X, *BK = *, E11.5)
290     FORMAT(1H1)
      STOP
      END
```

```

SUBROUTINE MING(Y,X,SK,N,NPA,ENN,WP,AK)
  DIMENSIONY(1),SK(1),X(1),DFUN(20,5),FUN(20),A(10),A(10),
  IC(2,2),T(10),WP(1)
  MM=1
5  CONTINUE
  DO1I=1,N
  FUN(I)= F(SK,X(I),ENN)
  1  CONTINUE
  DO2I=1,N
  DO3J=1,NPA
  CALL DER(J,NPA,SK,X(I),ENN,DFRP)
  DFUN(I,J)=DFRP
  3  CONTINUE
  2  CONTINUE
  DO4L=1,NPA
  A(L)=0.
  DO5I=1,N
  Z=WP(I)*(Y(I)-FUN(I))*DFUN(I,L)
  A(L)=A(L)+Z
  5  CONTINUE
  4  CONTINUE
  DO6J=1,NPA
  DO6L=1,NPA
  C(J,L)=0.
  DO6I=1,N
  P=DFUN(I,J)*DFUN(I,L)*WP(I)
  C(J,L)=C(J,L)+P
  6  CONTINUE
  CALL RIS(A,C,T)
  MM=MM+1
  ISS=1
  DO9I=1,NPA
  IF (ABS(T(I)).GT.ABS((SK(I)/100))) ISS=1
  IF (SK(I)+T(I))13,13,14
  13 SK(I)=SK(I)/10.
  GO TO 9
  14 SK(I)=SK(I)+T(I)
  9  CONTINUE
  IF (MM.GE.10)GO TO 12
  IF (ISS.EQ.1)GO TO 10
  12 DO11J=1,NPA
  AK(J)=SK(J)
  11 CONTINUE
  RETURN
45 END

```

SUBROUTINE DER

73/72 OPT=1

FTN 4.2+383

```
10 SUBROUTINE DER(L,NPA,BK,X,ENN,DERP)
    DIMENSION BK(10),BKH(10)
    DO1N=1,NPA
    IF(N.EQ.L)GOTO3
    5 BKH(M)=BK(M)
    GOTD 1
    3 H=BK(M)/10000.
    BKH(M)=BK(M)+H
    ] CONTINUE
    10 DERP=( F(BKH,X,ENN)- F(BK,X,ENN))/H
    RETURN
    END
```

SUBROUTINE RIS

73/72 OPT=1

FTN 4.2+383

```
5 SUBROUTINE RIS(A,C,T)
    DIMENSION A(2),C(2,2),T(2)
    D=(C(1,1)*C(2,2))-(C(2,1)*C(1,2))
    T(1)=((A(1)*C(2,2))-(A(2)*C(1,2)))/D
    T(2)=((C(1,1)*A(2))-(C(1,2)*A(1)))/D
    RETURN
    END
```

```

SUBROUTINE ORDER(A,NT1,NT2,MAX1,MAX2,MIN1,MIN2)
DIMENSION A(NT1,NT2)
MAX1=1
MAX2=1
5 DO10L=1,NT1
DO20K=1,NT2
IF(A(MAX1,MAX2).GE.A(K,L))GOTO20
MAX1=K
MAX2=L
10 CONTINUE
20 CONTINUE
MIN1=1
MIN2=1
15 DO30L=1,NT1
DO40K=1,NT2
IF(A(MIN1,MIN2).LE.A(K,L))GOTO40
MIN1=K
MIN2=L
20 CONTINUE
30 CONTINUE
RETURN
END
```

FUNCTION BRA

73/72 OPT=1

FTN 4.2+383

5

```
FUNCTION BRA(BK,Z,ENN)
  DIMENSION BK(5)
  BRA=(BK(1)*Z)/(((1.+(BK(2)*Z)**ENN)**(3./(2.*ENN)))
  RETURN
  END
```

FUNCTION F

73/72 OPT=1

FTN 4.2+383

5

```
FUNCTION F(BK,Z,ENN)
  DIMENSION BK(5)
  F=((1.+(BK(2)*Z)**ENN)**(3./(2.*ENN)))/BK(1)
  RETURN
  END
```

```

SUBROUTINE GRAPH(XMAX,XMIN,NPS,N,P,FF,YS,XS,NN)
  DIMENSION XT(120),XS(1),YYS(120),YS(120),YT(120),S(120),R(120),
  1)
  NP=NN/10
5   C SCLETTE DEGLI INTERVALLI
      DX=(XMAX-XMIN)/NN
      DO1 I=1,NN
          XT(I)=XMIN+(I-1)*DX
10  1 YT(I)=BRR(P,XT(I),FF)
      CALL ORDER(YT,1,NN,IYTX,IA,IYTN,IB)
      YTX=YT(IYTX)
      YTN=YT(IYTN)
      CALL ORDER(YS,1,NPS,IYSX,IA,IYSN,IB)
      YSX=YS(IYSX)
      YSN=YS(IYSN)
15  IF(YTX.GE.YSX)GO TO 300
      YMAX=YSX
      GOTD301
20  300 YMAX=YTX
      301 IF(YTN.LT.YSN)GOTD302
      YMIN=YSN
      GOTD303
      302 YMIN=YTN
      303 DY=(YMAX-YMIN)/N
25  C GRAFICO
      DO3J=1,NN
      DO4I=1,NPS
          IF((XS(I).GE.XT(J)).AND.(XS(I).LT.XT(J+1)))GOTD370
4   YYS(J)=YMAX*100000.
      GOTD3
30  370 YYS(J)=YS(I)
      3 CONTINUE
      DATA DOT,BLANK,XCS/1H.,1H.,16X/
      Y1=YMAX
      Y2=YMAX-DY
35  PRINT201
      300 I=1,NN
          IF((YT(I).LT.Y1).AND.(YT(I).GE.Y2))GOTD310
          S(I)=BLANK
          GOTD320
40  310 S(I)=DOT
      320 IF((YYS(I).LT.Y1).AND.(YYS(I).GE.Y2))GOTD330
          P(I)=BLANK
          GOTD2
45  330 P(I)=XCS
      3 CONTINUE
      PRINT 200,Y2,(S(I),I=1,NN)
      PRINT203,(R(I),I=1,NN)
      Y1=Y2
50  Y2=Y2-DY
      IF(Y1.LT.YMIN)GOTD350
      GO TO 350
      350 PRINT210
          PRINT220,(YT(I),I=1,NN,10)
55  200 FORMAT(1Y,714.5,* ** 120(A1))
      203 FORMAT(1H+,16X,120(A1))
      210 FORMAT(1H+,16X,12(10HI-----))
      220 FORMAT(4X,* VALORI DI X*,12(E9.2,1X))
      201 FORMAT(1H1)
60  RETURN
      END

```



TAVOLA DEI VALORI SPERIMENTALI E CORRETTI

P. CM	V. KM/S	V. COR. CM/S
.36424E+22	150.00	.15000E+08
.72848E+22	220.00	.22000E+08
.10927E+23	250.00	.25000E+08
.14570E+23	230.00	.23000E+08
.18212E+23	210.00	.21000E+08
.21854E+23	200.00	.20000E+08
.25497E+23	175.00	.17500E+08
.29139E+23	150.00	.15000E+08

ESPONENTE = 1.00000

AS= .11888E-13

BS= .18303E-21

PESI

1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1.000	1.000	1.000		

AK = .68048E-13

BK = .81466E-21

RAGGIO	VELOCITA	VFL.CALCOL.	SCARTO
.36424E+22	.15000E+08	.31366E+08	.16366E+08
.72848E+22	.22000E+08	.27145E+08	.51454E+07
.10927E+23	.25000E+08	.23864E+08	-.11361E+07
.14570E+23	.23000E+08	.21475E+08	-.15251E+07
.18212E+23	.21000E+08	.19664E+08	-.13356E+07
.21854E+23	.20000E+08	.18238E+08	-.17618E+07
.25497E+23	.17500E+08	.17080E+08	-.42046E+06
.29139E+23	.15000E+08	.16115E+08	.11150E+07

SICMA = .61669E+07

MASSA = .12847E+45

MASSA = .64233E+11

ESPONENTE = 1.50000

AS= .68636E-14

BS= .14527E-21

PESI

1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1.000	1.000	1.000		

AK = .14113E-13

BK = .28916E-21

RAGGIO	VELOCITA	VFL.CALCOL.	SCARTO
.36424E+22	.15000E+08	.16588E+08	.15478E+07
.72848E+22	.22000E+08	.23926E+08	.19258E+07
.10927E+23	.25000E+08	.23651E+08	-.13488E+07
.14570E+23	.23000E+08	.21753E+08	-.12472E+07
.18212E+23	.21000E+08	.19915E+08	-.10850E+07
.21854E+23	.20000E+08	.18375E+08	-.16254E+07
.25497E+23	.17500E+08	.17106E+08	-.39446E+06
.29139E+23	.15000E+08	.16051E+08	.10508E+07

SIGMA = .13548E+07

MASSA = .11405E+45

MASSA = .57027E+11

ESPOINENTE = 2.00000

AS= .52152E-14

BS= .12942E-21

PEST

1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1.000	1.000	1.000		

AK = .76748E-14

BK = .19504E-21

RAGGIO	VELOCITA	VFL.CALCOL.	SCARTO
.36424E+22	.15000E+08	.18110E+08	.31103E+07
.72848E+22	.22000E+08	.24026E+08	.20257E+07
.10927E+23	.25000E+08	.23381E+08	-.16191E+07
.14570E+23	.23000E+08	.21559E+08	-.14407E+07
.18212E+23	.21000E+08	.19820E+08	-.11796E+07
.21854E+23	.20000E+08	.18347E+08	-.16526E+07
.25497E+23	.17500E+08	.17120E+08	-.37952E+06
.29139E+23	.15000E+08	.16092E+08	.10917E+07

SIGMA = .17296E+07

MASSA = .11599E+45

MASSA = .57997E+11

ESPONENTE = 2.50000

AS= .44229E-14

BS= .12075E-21

PESI

1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1.000	1.000	1.000		

AK = .57314E-14

BK = .16195E-21



RAGGIO	VELCCITA	VFL.CALCOL.	SCARTO
.36424E+22	.15000E+08	.24703E+08	.97034E+07
.72648E+22	.22000E+08	.25340E+08	.33400E+07
.10927E+23	.25000E+08	.23308E+08	-.16922E+07
.14570E+23	.23000E+08	.21314E+08	-.16259E+07
.18212E+23	.21000E+08	.19643E+08	-.13569E+07
.21854E+23	.20000E+08	.18266E+08	-.17343E+07
.25497E+23	.17500E+08	.17120E+08	-.37998E+06
.29139E+23	.15000E+08	.16154E+08	.11538E+07

SIGMA = .38299E+07

MASSA = .12357E+45

MASSA = .61787E+11

ESPONENTE = 3.00000

AS= .39627E-14

RS= .11530E-21

PESI

1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1.000	1.000	1.000		

AK = .48876E-14

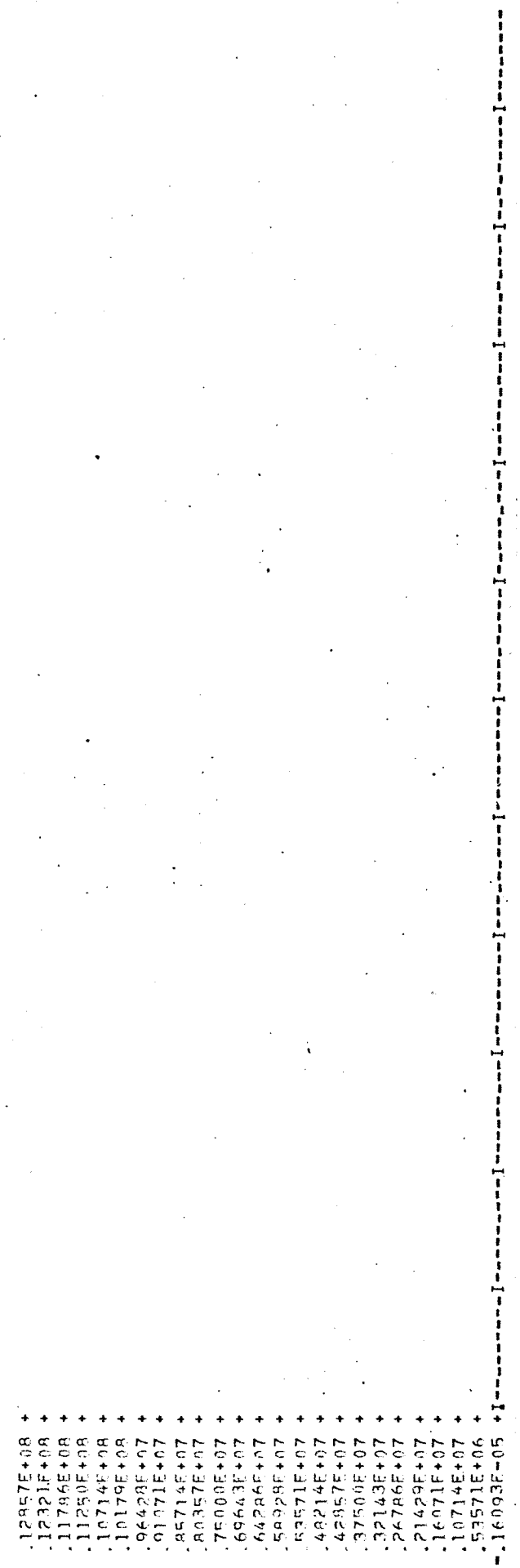
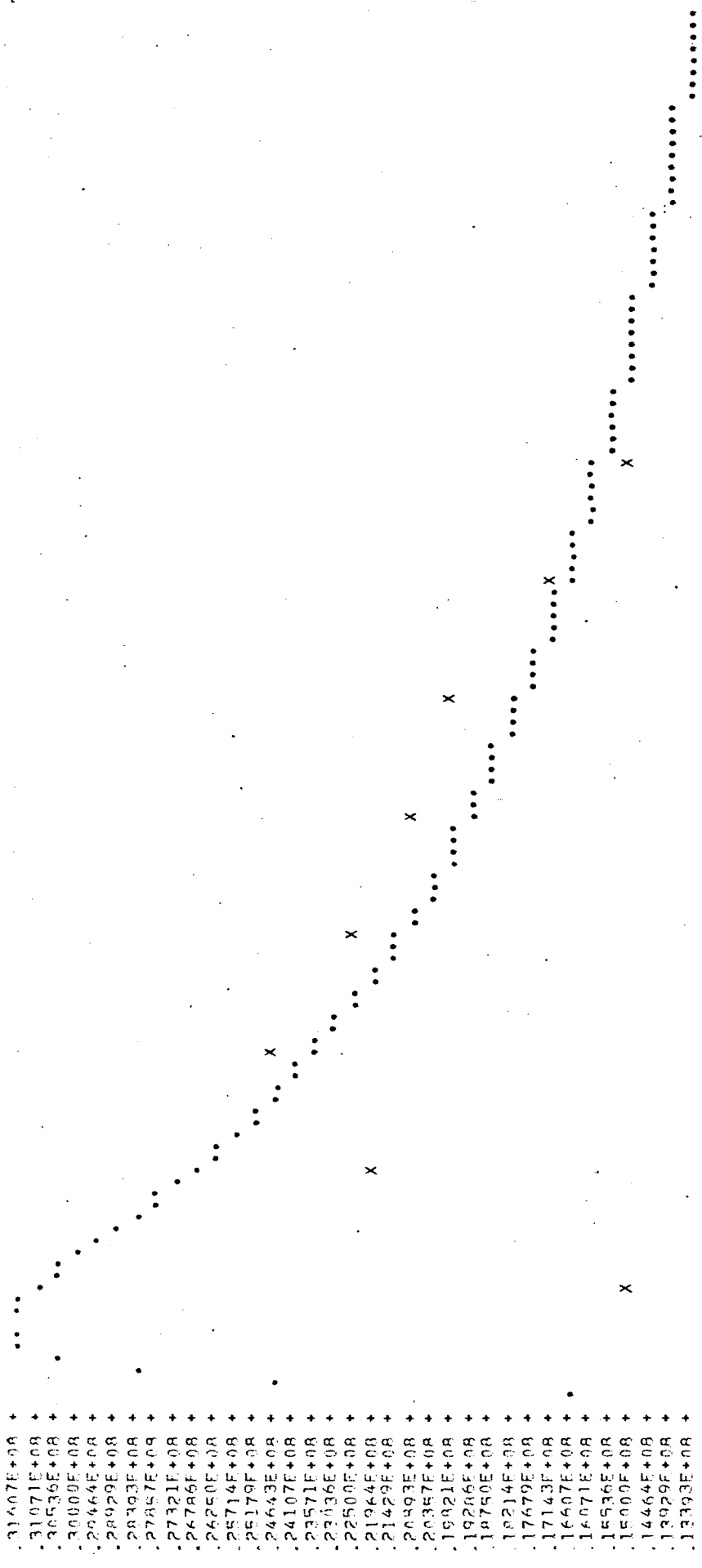
BK = .14646E-21

RAGGIO	VELOCITA	VFL.CALCOL.	SCARTO
.36424E+22	.15000E+08	.20576E+08	.55764E+07
.72848E+22	.22000E+08	.24413E+08	.24126E+07
.10927E+23	.25000E+08	.23218E+08	-.17825E+07
.14570E+23	.23000E+08	.21386E+08	-.16139E+07
.18212E+23	.21000E+08	.19716E+08	-.12821E+07
.21854E+23	.20000E+08	.18309E+08	-.16911E+07
.25497E+23	.17500E+08	.17129E+08	-.37115E+06
.29139E+23	.15000E+08	.16133E+08	.11329E+07

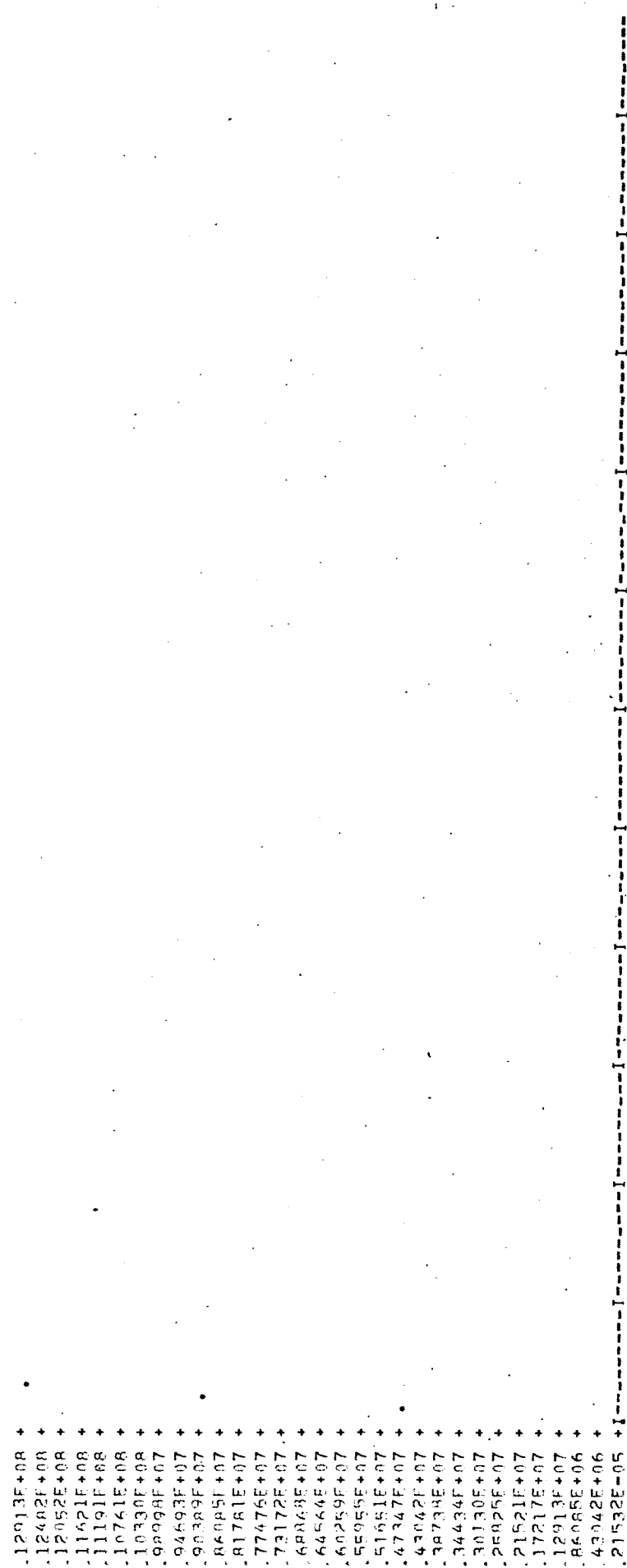
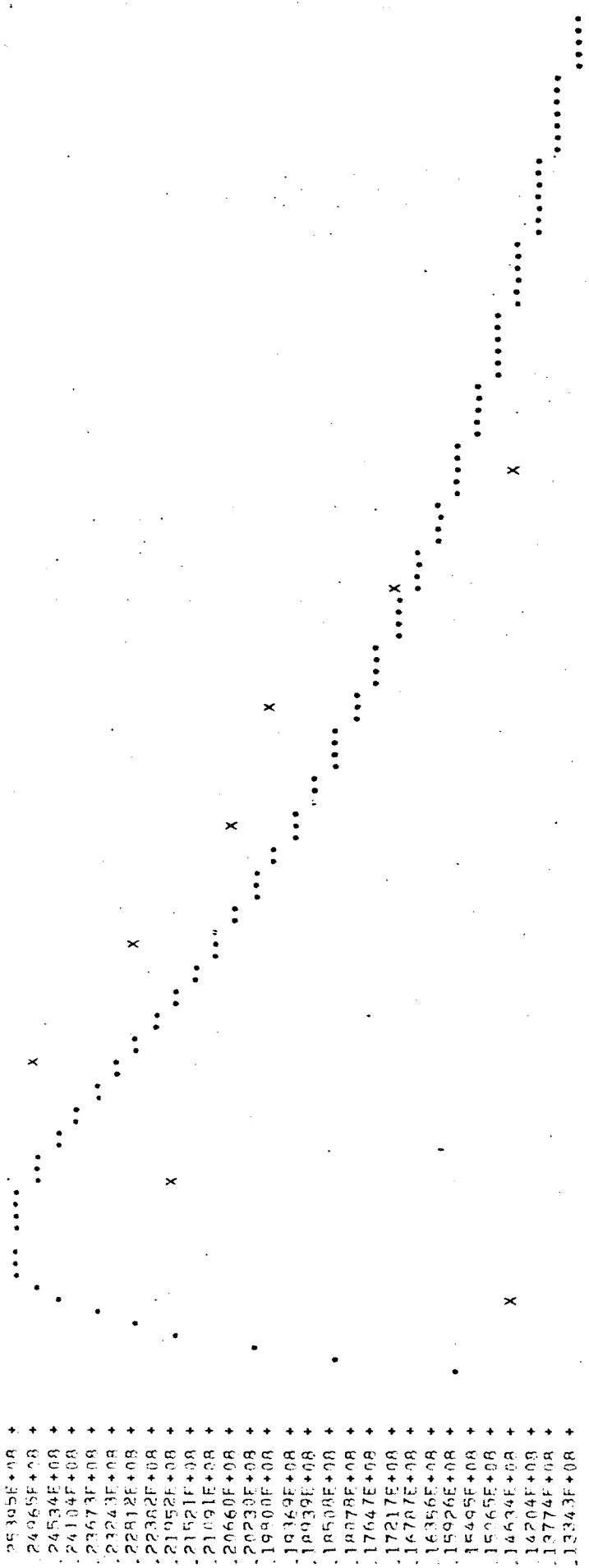
SIGMA = .24654E+07

MASSA = .11908E+45

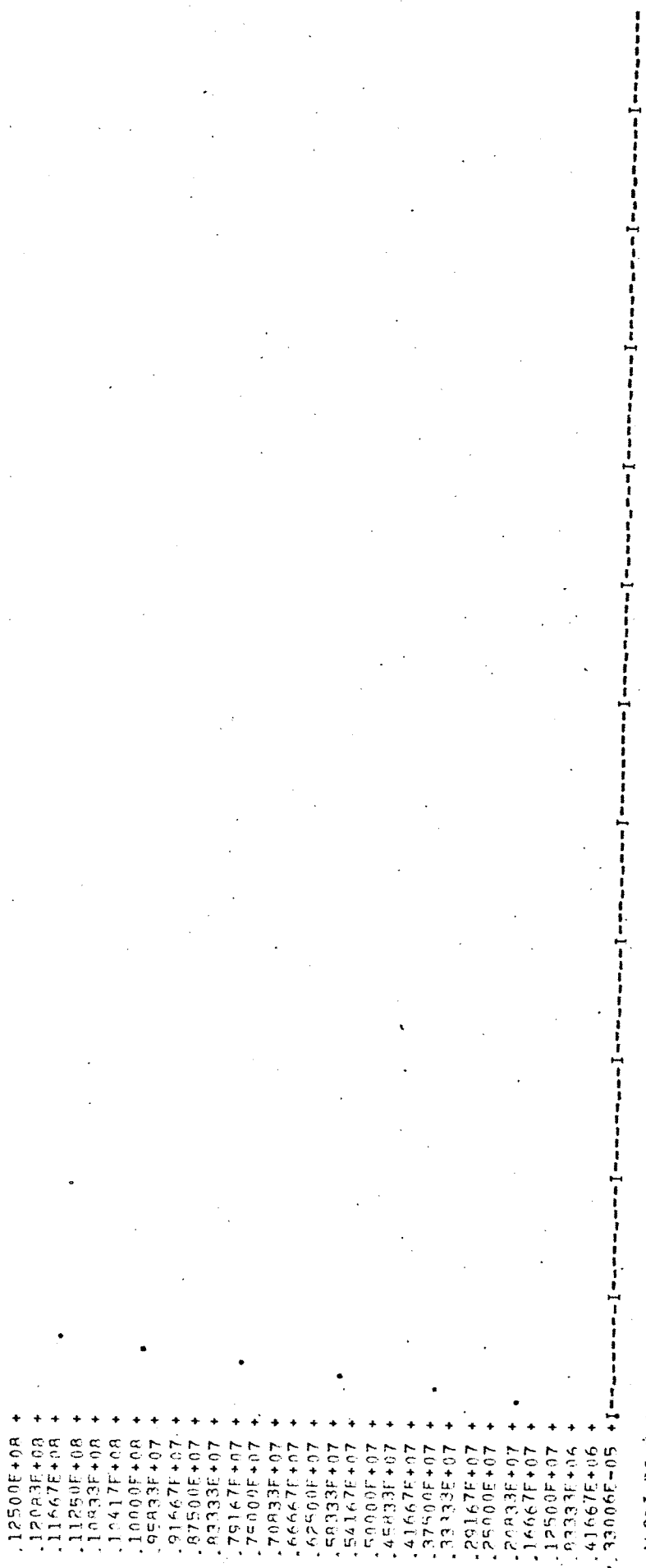
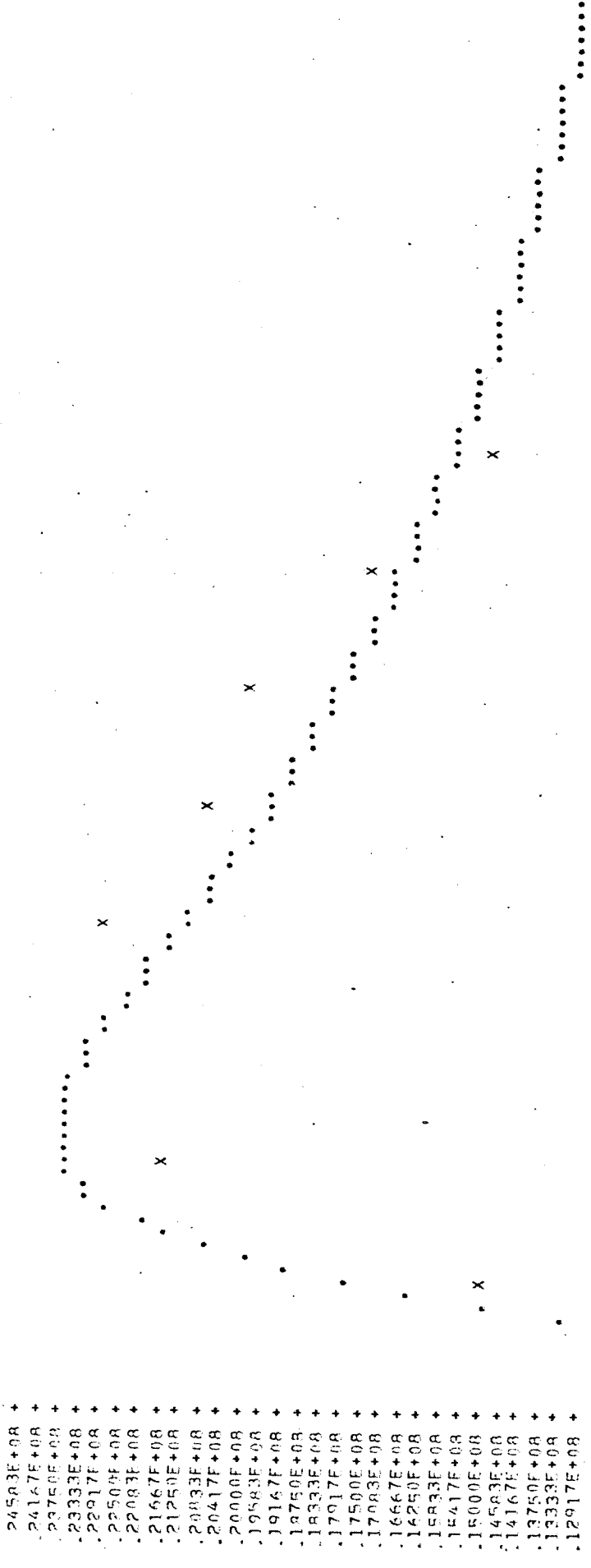
MASSA = .59542E+11



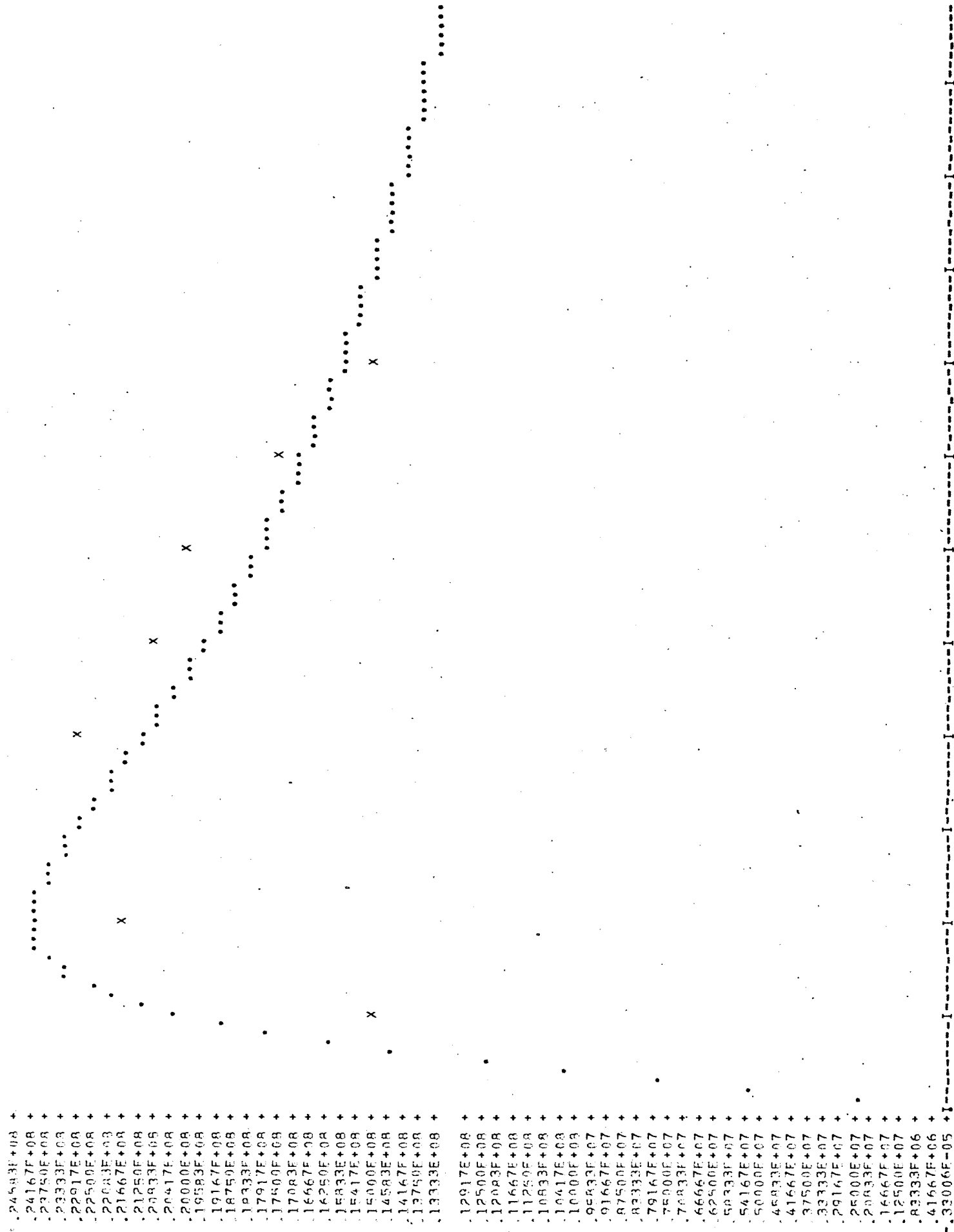
VALORI DI X 0.36E+22 0.73E+22 0.11E+23 0.15E+23 0.18E+23 0.22E+23 0.25E+23 0.29E+23 0.33E+23 0.36E+23 0.40E+23



VALORI DI X 0. .36E+22 .73E+22 .11E+23 .15E+23 .18E+23 .22E+23 .25E+23 .29E+23 .33E+23 .36E+23 .40E+23



VALOPT DT Y 0.



VALORI DI X 0. .36E+22 .73E+22 .11E+23 .15E+23 .18E+23 .22E+23 .25E+23 .29E+23 .33E+23 .36E+23 .40E+23