

Istituto Nazionale Astrofisica

Istituto di Radioastronomia

Rapporto Tecnico

**La KL Transform: considerazioni generali sulle
metodologie di analisi ed impiego nel campo della
Radioastronomia.**

F.Schillirò – Istituto di Radioastronomia, Radiotelescopio di Noto

S. Pluchino- Istituto di Radioastronomia, Radiotelescopio di Medicina

S. Montebugnoli- Istituto di Radioastronomia, Radiotelescopio di Medicina

Indice

Introduzione	pag.3
1. La Karhunen Loeve Transform	pag. 4
1.1 Lo sviluppo KL	pag. 4
1.2L'eigen Spectrum	pag. 5
2. Oratura della Matrice di Autocorrelazione	pag. 7
2.1 Considerazioni generali	pag. 7
2.2 Oratura della matrice di autocorrelazione: il metodo di analisi e di calcolo	pag. 8
3. Test e risultati	pag. 11
3.1 Segnali monocromatici con diverso SNR.	pag. 12
3.2 Segnali non monocromatici	pag. 16
4. Conclusioni	pag. 21
Bibliografia	pag. 23

Introduzione

Molti lavori precedenti a questo, hanno messo in luce le importanti caratteristiche della Karhunen Loeve Transform che la rendono uno strumento utilizzato sia nel campo della compressione, dell'analisi, e quindi del denoising dei dati sperimentali.

L'impiego nel campo della Radioastronomia di una tale tecnica di analisi può essere ricondotto a tutte quelle applicazioni nelle quali è importante distinguere in maniera severa rispetto ad un fondo fortemente rumoroso, componenti di segnale 'deterministico' con una qualsiasi larghezza di banda; proprio per questi motivi l'analisi KL si candida a diventare un utile strumento analitico complementare all'analisi spettrale; quest'ultima, ricordiamo, funziona molto bene solo per segnali a banda relativamente stretta e con livelli di segnale rumore non drasticamente bassi, e risente inoltre di una forte indeterminazione tra risoluzione frequenziale e risoluzione temporale.

Nonostante le principali proprietà della KLT siano conosciute e ne sia stata dimostrata la sua efficacia in diversi campi della scienza, non è possibile prescindere dalle importanti difficoltà computazionali insite negli algoritmi di sviluppo, dalle quali non è semplice svincolarsi, con il conseguente risultato di uno scarso utilizzo della KLT stessa.

In questo lavoro non solo ci si propone di dimostrare quanto potente può essere l'analisi KL anche in ambito radioastronomico, spogliandosi da preconcetti circa alcuni dei relativi campi di impiego (come ad esempio l'ambito SETI), ma si descrive un metodo di analisi KLT veloce, anche se approssimato, che permette di ottenere dei buoni risultati di denoising su segnali test, molto simili a quelli ottenuti nella realtà della pratica osservativa.

Ulteriori test su segnali sperimentali acquisiti con osservazioni ad hoc, saranno discussi ed analizzati in altri lavori successivi a questo.

1. La Karhunen Loeve Transform

Il concetto alla base della KLT è molto semplice: essenzialmente si tratta di una trasformazione degli assi coordinati nello spazio di Hilbert. Nel caso dell'elaborazione numerica dei segnali questo significa che mediante lo sviluppo in serie KL di un segnale affetto da rumore e da una conseguente analisi degli autovalore associati (o soltanto dell'autovalore dominante), è possibile ottenere una rivelazione del segnale coerente, ed ancor di più una ricostruzione dello stesso. Ad un grande autovalore dominante, ottenuto grazie ad un livello relativamente alto di rapporto segnale rumore (SNR), corrisponde un'autofunzione che è una buona rappresentazione del segnale stesso. Chiaramente ciò è di particolare interesse per i segnali a larga banda, per i quali la trasformata di Fourier non è poi così utile, fornendo un potente strumento matematico per il recupero ottimale di qualunque segnale immerso in qualsiasi forma di rumore.

1.1 Lo sviluppo KL

La KLT prende nome da due matematici, il finlandese Kari Karhunen ed il franco-americano Maurice Loève i quali dimostrarono più o meno nello stesso periodo (1946) e in modo del tutto indipendente l'uno dall'altro che la serie (1.1) è convergente.

Sia quindi $X(t)$ un segnale rumoroso nello spazio di Hilbert, definiamo sviluppo KL la serie infinita

$$X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \phi_n(t) \quad (1.1)$$

Supponendo che l'autocorrelazione del rumore $E\{X(t_1)X(t_2)\}$ sia una funzione nota di t_1 e t_2 , si può dimostrare che le funzioni $\phi_n(t)$ per $n=1,2,\dots$ sono le autofunzioni dell'autocorrelazione considerata come un operatore della variabile temporale, cioè le autofunzioni sono le soluzioni dell'equazione integrale

$$\int_0^T E\{X(t_1)X(t_2)\} \phi_n(t_2) dt_2 = \lambda_n \phi_n(t_1). \quad (1.2)$$

Queste $\phi_n(t)$ formano una base ortonormale nello spazio di Hilbert e sono, in ultimo, la migliore base per descrivere il segnale affetto da rumore, migliore di qualsiasi altra base ottenuta mediante la classica trasformata di Fourier.

Perciò si potrebbe dire che la KLT si adatta alla forma del segnale + rumore, qualunque esso sia.

Un ulteriore vantaggio della KLT è che le Z_n della (1.1) sono variabili aleatorie ortogonali, cioè $E\{Z_m Z_n\} = \delta_{mn} \lambda_n$.

Se $X(t)$ è un processo gaussiano, questa ortogonalità implica indipendenza statistica e ciò significa che i termini nello sviluppo KL sono statisticamente incorrelati. Dal momento che le costanti (tutte positive) λ_n sono gli autovalori e le varianze delle variabili aleatorie Z_n , qualunque sviluppo parziale, ottenuto troncando la serie ai primi termini, è la migliore approssimazione dello sviluppo KL completo, in termini di errore quadratico medio. Questa proprietà suggerisce immediatamente una possibile applicazione della KLT al progetto SETI: usare il primo autovalore (l'autovalore dominante) come prima soglia naturale per la reiezione di falsi allarmi.

Infine, la teoria matematica della KLT mostra inoltre che non è necessario ipotizzare che il processo $X(t)$ sia stazionario, cioè non è necessario che l'autocorrelazione $E\{X(t_1)X(t_2)\}$ sia una funzione esclusivamente della differenza $|t_2 - t_1|$. Anche questo ci parla delle notevoli differenze della KLT con le classiche tecniche basate su Fourier, che tuttavia restano rigorosamente valide ma solo per processi stazionari.

1.2 L'eigen Spectrum

Sia $\underline{\lambda}$ il vettore avente come componenti gli autovalore $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, definiamo l'eigen-spectrum il grafico dell'andamento di tali valori ordinati in maniera decrescente.

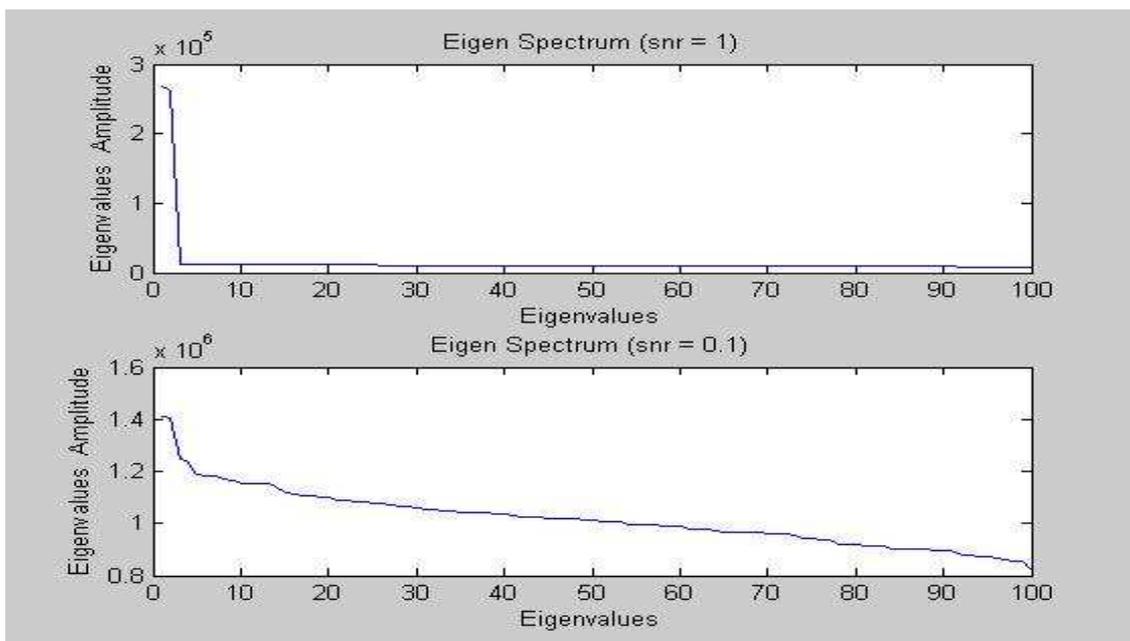


Fig. 1 Eigen Spectrum di un tono a 300 Hz per diversi rapporti Segnale/rumore

Tipicamente l'eigen-spectrum evidenzia un andamento decrescente nel quale le primissime componenti hanno dei valori molto più alti rispetto alle altre, che quindi possono essere separate rispetto alle restanti componenti, queste ultime assumibili come responsabili del carattere rumoroso del segnale.

Questa semplice operazione rappresenta un vero e proprio *filtraggio delle componenti di rumore*; tanto maggiore è il rapporto segnale/rumore, quanto più efficiente e veloce risulta l'operazione di denoising, in quanto più semplice risulta fissare una soglia al di sopra della quale gli autovalore si possono assumere essere relativi al segnale, mentre gli autovalore restanti formano un bulk riconducibili al rumore.

Naturalmente nel caso in questione, sono stati considerati solo i primi 100 autovalori, ma nel caso si vogliano analizzare più autovalori la differenza tra i primi di questi ed il bulk di rumore si rende sempre più netta; questa idea è alla base della tecnica dell'orlatura della matrice di autocorrelazione di cui si discuterà più avanti. L'acquisizione di un numero considerevole di autovalori con le tecniche descritte in bibliografia [2] è pesante da un punto di vista computazionale e non è semplice adattare il meccanismo di soglia per la reiezione di falsi segnali. Il metodo che viene proposto in questo studio è legato alla estrazione del primo autovalore, che contiene già insito in se stesso l'informazione del suo autovettore; in presenza di segnale coerente ,anche molto debole rispetto al rumore, è possibile non solo riconoscere lo stesso segnale in modo ispettivo dall'andamento dell'autovalore nel tempo, ma anche fare girare una routine automatica per estrarre velocemente il relativo primo autovettore; quest' ultimo, per rapporti segnale/rumore elevati coincide già con il segnale coerente filtrato da rumore. Negli altri casi di SNR piccolo verranno esposte alcune tecniche che permettono di applicare ugualmente questa nuova tecnica, che verrà chiamata Tecnica di Oratura della Matrice di Autocorrelazione.

2. Oratura della Matrice di Autocorrelazione.

2.1 Considerazioni generali.

Supponiamo di avere un segnale $X(t)$, variabile membro di un processo in generale non stazionario a media nulla, affetto da rumore di un qualsiasi tipo, e di volerne calcolare la trasformata KL,

ovvero lo sviluppo in serie $X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \phi_n(t)$

descritto nel paragrafo precedente. L'operazione in questione viene effettuata calcolando la funzione di autocorrelazione del processo che definiamo come

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2) dx_2 \quad (2.1)$$

essendo t_1 e t_2 due istanti di tempo distinti. Se il processo è stazionario allora la funzione di autocorrelazione diventa funzione della sola variabile $|t_2 - t_1|$, come si supporrà da adesso in avanti.

Il passo successivo per il calcolo della KLT del segnale $X(t)$ è la costruzione della matrice di autocorrelazione, che altro non è che una matrice di Toeplitz costruita proprio sulla funzione R_{xx} al variare del tempo $t = |t_2 - t_1|$.

Passando al caso discreto, più vicino alle esigenze computazionali, possiamo indicare con T la matrice di Toeplitz che si ottiene dagli N valori non ridondanti della matrice di autocorrelazione (che ricordiamo è composta da $2*N + 1$ valori speculari) :

$$T = \begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & R_{xx}(2) & \dots & \dots & R_{xx}(N) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & \dots & \dots & R_{xx}(N-1) \\ R_{xx}(2) & R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \dots & \dots & R_{xx}(N-2) \\ \dots & \dots & \dots & R_{xx}(0) & \dots & \dots \\ R_{xx}(N) & R_{xx}(N-1) & \dots & \dots & R_{xx}(1) & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Il numero N è quindi il numero di campioni del segnale $X(t)$ analizzati per il calcolo della KLT; maggiore è questo numero, più accurati sono i risultati ottenuti, ma maggiore è il carico computazionale da sostenere.

Gli autovalori λ_i della matrice T ed i relativi autovettori ϕ_i , sono legati ai termini dello sviluppo in serie della 1.1 dalla relazione :

$$E\{Z_m Z_n\} = \delta_{mn} \lambda_n \quad (2.3)$$

tramite la quale è possibile conoscere i termini Z_i e quindi ricostruire il segnale dai primi autovettore riconducibili agli autovalori dominanti. Questo in virtù del fatto che la funzione di autocorrelazione stessa è sviluppabile in serie di funzioni ϕ_i che ricordiamo essere ortonormali, come dalla 2.4 (per i passaggi completi consultare [2] a pag. 29):

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \phi_m(t_1) \phi_m(t_2) \quad (2.4)$$

Da questa espressione è possibile ricavare proprio i ϕ_i , risolvendo l'equazione integrale associata [1], descritta dalla seguente formula:

$$\int_0^T E\{X(t_1)X(t_2)\} \phi_n(t_1) dt_1 = \lambda_n \phi_n(t_2) \quad (2.5)$$

Si può quindi concludere che la KLT automaticamente adatta se stessa al profilo del segnale affetto da rumore, qualsiasi sia il comportamento nel tempo, adottando come nuovo frame di riferimento nello spazio di Hilbert, le funzioni base rappresentate dalle autofunzioni $\phi_n(t)$ ricavate dalla funzione di autocorrelazione del segnale + rumore.

2.2 Oratura della matrice di autocorrelazione: il metodo di analisi e di calcolo.

Supponiamo adesso di considerare la matrice T calcolata sulla base dell'autocorrelazione di un segnale $X(t)$, digitalizzato campionando con una data frequenza. Il metodo parte da una considerazione molto semplice, ma allo stesso esempio interessante da un punto di vista matematico; ogni campione del segnale $X(k\Delta t)$ rappresenta un campione della corrispondente funzione di autocorrelazione, ovvero un aumento dell'ordine della matrice di Toeplitz, che subirà una 'oratura', ovvero un aumento di 1 riga ed 1 colonna. Operativamente questo fatto corrisponde alla nascita di un nuovo autovalore nell'eigen-spectrum, ma nello stesso tempo anche alla variazione dei precedenti autovalori, a seconda del carattere del segnale che si osserva, nonché al livello ed al tipo di rumorosità che esso presenta.

Naturalmente, più campioni di segnale si studiano, più autovalori nascono nello sviluppo in serie di cui alla formula 2.4, più accurata è la ricostruzione del segnale se si prendono in considerazione solo i primi autovalori dell'eigen-spectrum responsabili del segnale e non quelli caratteristici del

rumore, mediante una opportuna soglia. Il problema fondamentale sta nel fatto che per grandi dimensioni della matrice T , il carico computazionale diventa pesante e non sempre facile stabilire la soglia, se si volesse ricostruire in modo significativo il segnale.

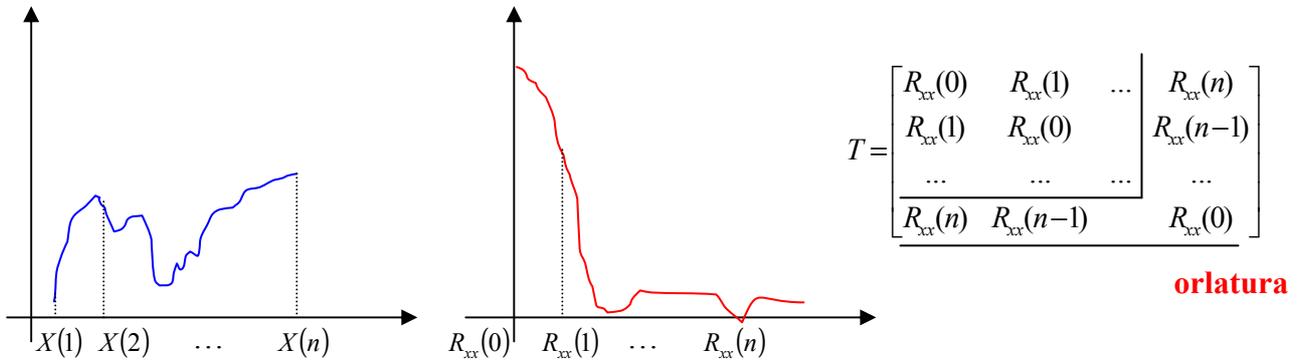


Fig.2 Costruzione della matrice T e relativa orlatura al variare di $X(n)$

L'idea che si è avuta è quella di studiare la variazione solo del primo degli autovalori al variare dell'ordine della orlatura, visto che esso diventa fortemente dominante sia per rapporti segnale/rumore alti, che per valori piccoli nel momento in cui si decide di integrare per un certo tempo il segnale di partenza (e quindi la sua funzione di autocorrelazione) in modo da abbattere in qualche misura il carattere rumoroso.

Quando si parla di variazione si parla chiaramente dell'operazione di derivata, in questo caso del vettore degli autovalori $\lambda(n)$ rispetto all'ordine n di orlatura, ovvero al numero n di campioni di segnale ricevuto.

L'informazione che si deduce dallo studio della derivata del primo autovalore rispetto al tempo (o ciò che è lo stesso all'ordine di orlatura) è sì limitata, ma tuttavia sufficiente non solo a rilevare se esiste un segnale coerente immerso in una qualsiasi forma di rumore, ma anche a determinare un segnale che è fortemente somigliante all'autovettore associato, cioè alla prima autofunzione che descrive in maniera più o meno fedele il segnale stesso, a seconda del livello di rumore di cui quest'ultimo è affetto.

Il calcolo del primo autovalore che è sempre dominante rispetto agli altri, può essere condotto mediante il metodo delle potenze, che è un metodo iterativo veloce, molto efficiente ma che può dare falsi risultati se non calibrato opportunamente; in particolare il metodo può necessitare di un numero variabile di iterazioni a seconda del carattere rumoroso del segnale in ingresso; quindi bisogna fare molta attenzione ai falsi allarmi, ed in questo caso prevedere un controllo ispettivo sui dati, nonostante le procedure e le routine di calcolo siano automatiche.

In definitiva il metodo dell'orlatura della matrice di autocorrelazione porta a risultati di notevole importanza per diversi motivi:

- 1) Il solo andamento del vettore $\lambda_1(n)$ al variare dei campioni del segnale, rivela subito se il questo nasconde una componente coerente oppure è puro rumore;
- 2) il vettore $\frac{\partial \lambda(n)}{\partial n}$ rivela immediatamente le componenti di segnale coerente sia monocromatici che a larga banda, anche per rapporti segnale rumore molto bassi (per es. 0.01) , fornendo una ricostruzione abbastanza fedele dello stesso segnale;
- 3) Il metodo delle potenze è sensibile al rumore, ma se ben usato porta a ricostruire fedelmente anche l'autovettore dominante (oltre che l'autovalore), cioè la prima autofunzione associata al segnale. Tuttavia ciò comporta un dispendio notevole in termini sia di calcolo che di risorse di memoria, al quale si può ovviare proprio con il calcolo della derivata $\frac{\partial \lambda(n)}{\partial n}$ che risponde anche a questa esigenza, come descritto al punto 2;
- 4) Abbiamo già detto che maggiore è il numero di campioni acquisiti, migliore è la discriminazione del segnale sul rumore, ma più consistente diventa il carico computazionale (a volte anche del solo primo autovalore!!) a causa della dimensione della matrice T . La cosa è ancora più sensibile se il rapporto segnale rumore è molto basso (es. <0.05). In tal caso è molto più veloce ed efficace stabilire una finestra di dati di riferimento sulla quale calcolare la autocorrelazione, quindi acquisire un certo numero di campioni tali da formare un vettore di autocorrelazione di lunghezza pari alla finestra, e da qui integrare vettori autocorrelazione per un tempo sufficiente a fare sì che il contributo di rumore incorrelato venga diminuito. A questo punto si può applicare il metodo di cui sopra, che risponde quindi in maniera appropriata con una notevole velocità.

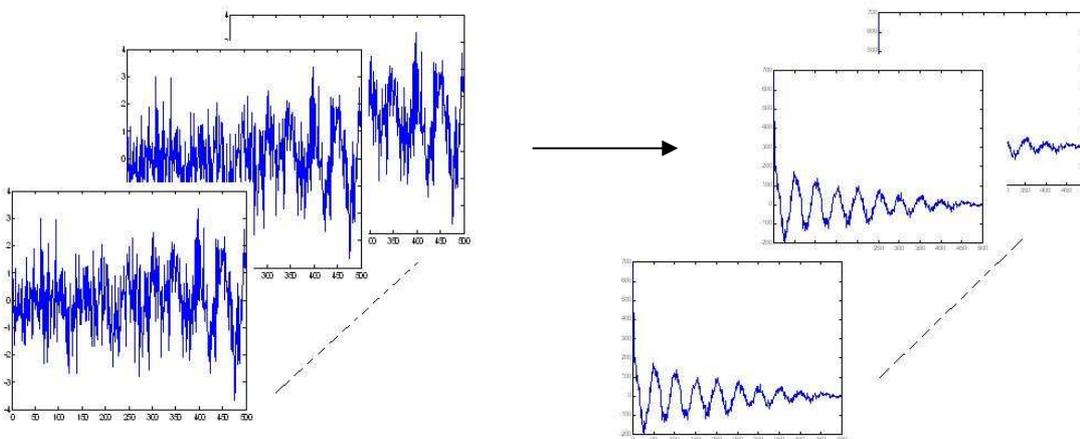


Fig. 3 Acquisizione frame dati e relativa integrazione della funzione di autocorrelazione

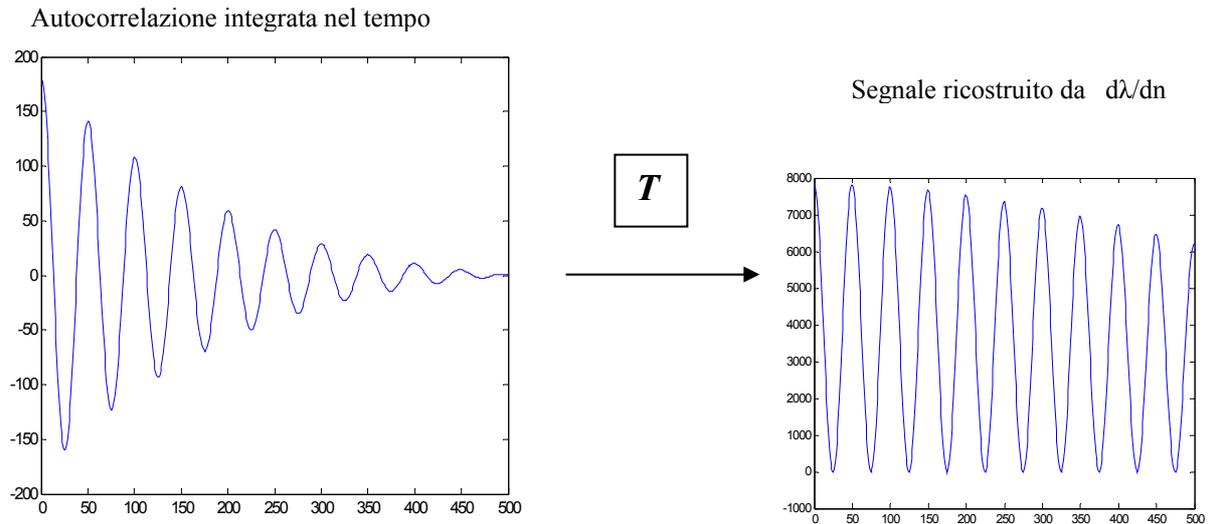


Fig. 4 Costruzione del vettore autocorrelazione integrato, della matrice T associata ed estrazione del $\frac{\partial \lambda(n)}{\partial n}$.

3. Test e risultati

Test su segnali sintetici sono stati condotti per testare la validità della teoria fin qui esposta, nonché migliorarne l'efficienza, la velocità di calcolo e l'occupazione totale complessiva in memoria.

I criteri di test su segnali sintetici sono i seguenti:

- 1) Banda passante: sono stati sintetizzati segnali con diverse caratteristiche frequenziali; in particolare:
 - a. Segnali perfettamente monocromatici;
 - b. Segnali monocromatici simultanei a frequenze vicine, come ad esempio modulazioni in frequenza;
 - c. Segnali con banda gaussiana con diversi valori di HPBWD.
- 2) Rapporto segnale/rumore (SNR); sono stati analizzati diversi valori di rapporto segnale rumore, fino a livelli estremamente bassi (0.005), questi ultimi realizzati con la tecnica di integrazione della funzione di autocorrelazione;
- 3) Numero di autovalori considerati: tipicamente si è sempre considerato la lunghezza di un segnale pari ad un secondo, quindi $N_{MAX} = \frac{1}{\Delta t}$, dove Δt è l'intervallo di campionamento; tuttavia per rilevare segnali a frequenza minore dell'Hertz occorre necessariamente acquisire più campioni.
- 4) Numero di iterazioni per il calcolo del metodo delle potenze; legato al SNR, è stabilito in base a criteri ispettivi nel calcolo di $\lambda_1(n)$.

3.1 Segnali monocromatici con diverso SNR.

Si è testato un segnale a 300 Hz con frequenza di campionamento 1000 Hz, a diversi SNR; i risultati sono presentati descrivendo sia il vettore $\lambda_1(n)$ al variare dei campioni acquisiti, il vettore $\frac{\partial \lambda(n)}{\partial n}$; nel caso di SNR molto piccoli si da anche un grafico dell'autocorrelazione integrata nel tempo.

Segnale monocromatico, SNR=10;

E' interessante notare che la crescita dell'autovalore $\lambda_1(n)$ è lineare, ad essa è (grafico 2) è sovrapposto un ripple che varia con la frequenza del segnale; ciò è evidente nel grafico 4, dove si può leggere questo andamento; l'andamento crescente del primo autovalore ne prova il suo carattere dominante rispetto agli altri.

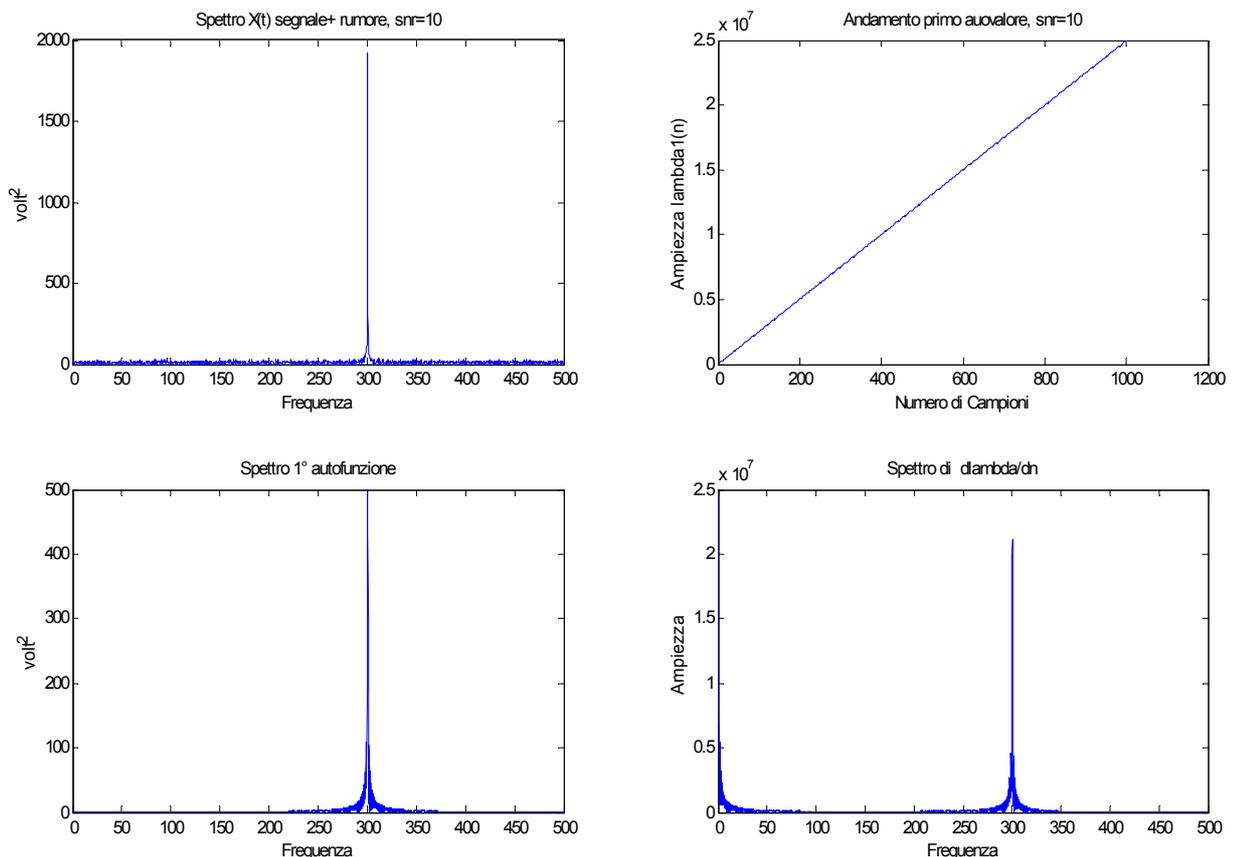


Fig. 5 SNR=10, segnale X(t) monocromatico, 1° autovalore, 1° autofunzione, $\frac{\partial \lambda(n)}{\partial n}$.

Da notare anche la convergenza della prima autofunzione, che bene approssima il segnale di partenza filtrando totalmente il rumore. Ripetiamo comunque, che il calcolo di questa

autofunzione è dispendioso soprattutto in termini di occupazione di memoria, e può quindi essere sostituito, come stima di massima, con il calcolo di $\frac{\partial \lambda(n)}{\partial n}$.

Segnale monocromatico, SNR=0.1;

Il caso è interessante poiché il SNR si fa critico; si può iniziare a vedere i grafici con 1000 campioni di segnale acquisiti:

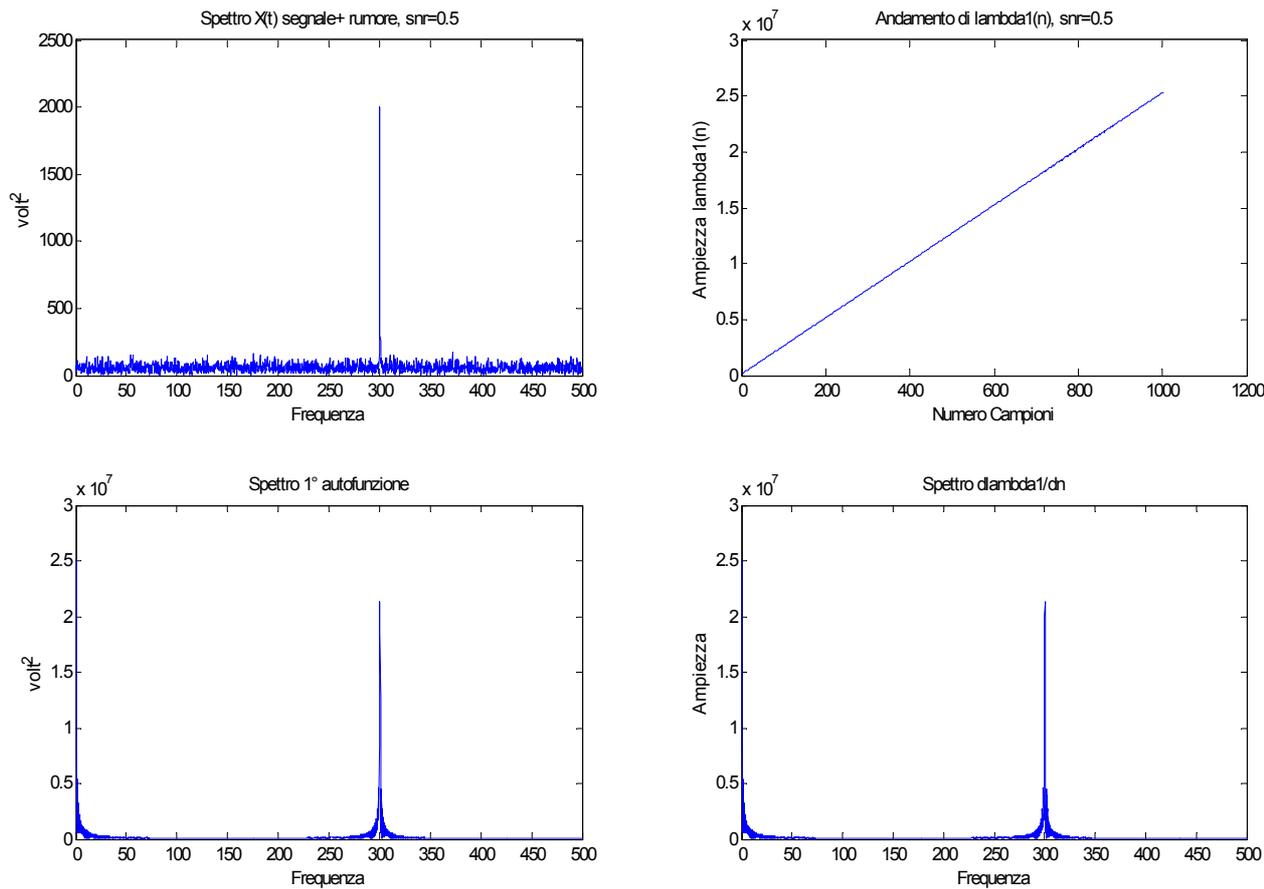


Fig. 6 SNR=0.1, segnale X(t) monocromatico, 1° autovalore, 1° autofunzione, $\frac{\partial \lambda(n)}{\partial n}$.

Naturalmente le condizioni dello spettro di X(t) peggiorano notevolmente, visto che esso è affetto da un livello di rumore più alto. La cosa interessante è notare il grafico 2, ovvero nella seconda parte l'andamento è simile a quello registrato in precedenza con snr=10, ma nella prima parte c'è un andamento diverso, segno del fatto che il rumore prende il sopravvento. Ciò si può anche vedere dallo spettrogramma in figura 7. La prima parte risente del carattere rumoroso poiché il segnale non si è correlato abbastanza, anche se comunque esso è ancora evidente sin dall'inizio.

Se si volessero risultati migliori, occorrerebbe valutare più campioni del segnale, per esempio 2000, oppure iniziare ad integrare la funzione di autocorrelazione, per arrivare quindi ad avere una matrice di autocorrelazione integrata dalla quale calcolare tutti i parametri.

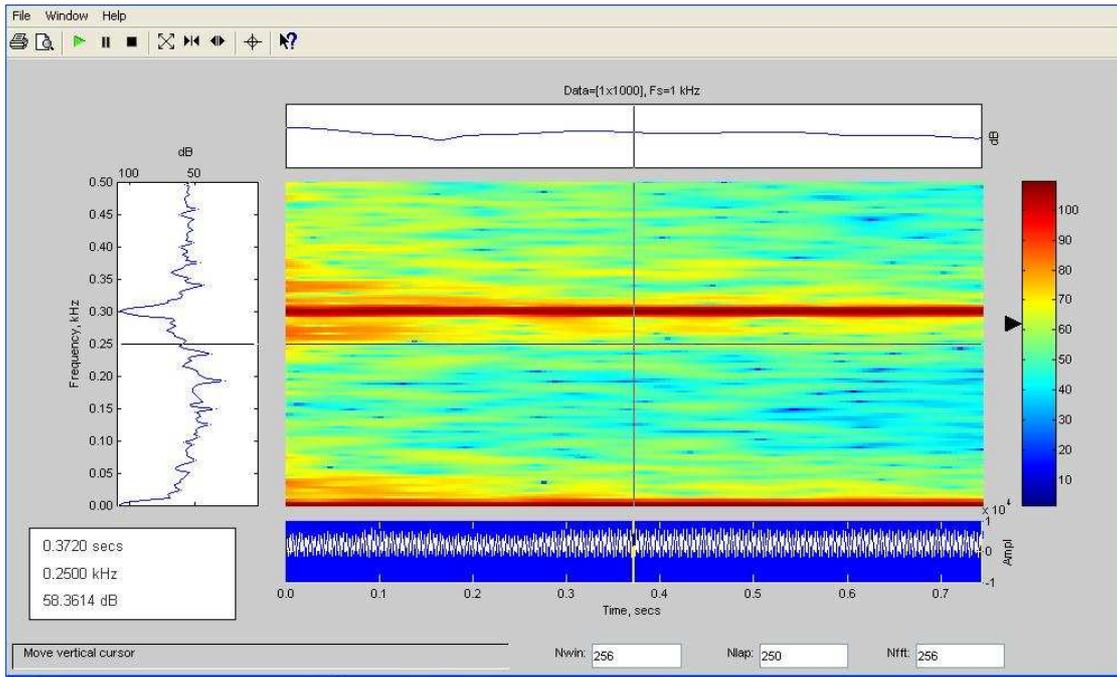


Fig. 7 Spetrogramma al variare del tempo di $\frac{\partial \lambda(n)}{\partial n}$.

Segnale monocromatico, SNR=0.005;

La situazione dello spettro del segnale (prima figura) in questione è critica, visto il bassissimo rapporto segnale rumore; tuttavia lo sviluppo del 1° autovalore ed autovettore permettono ancora di

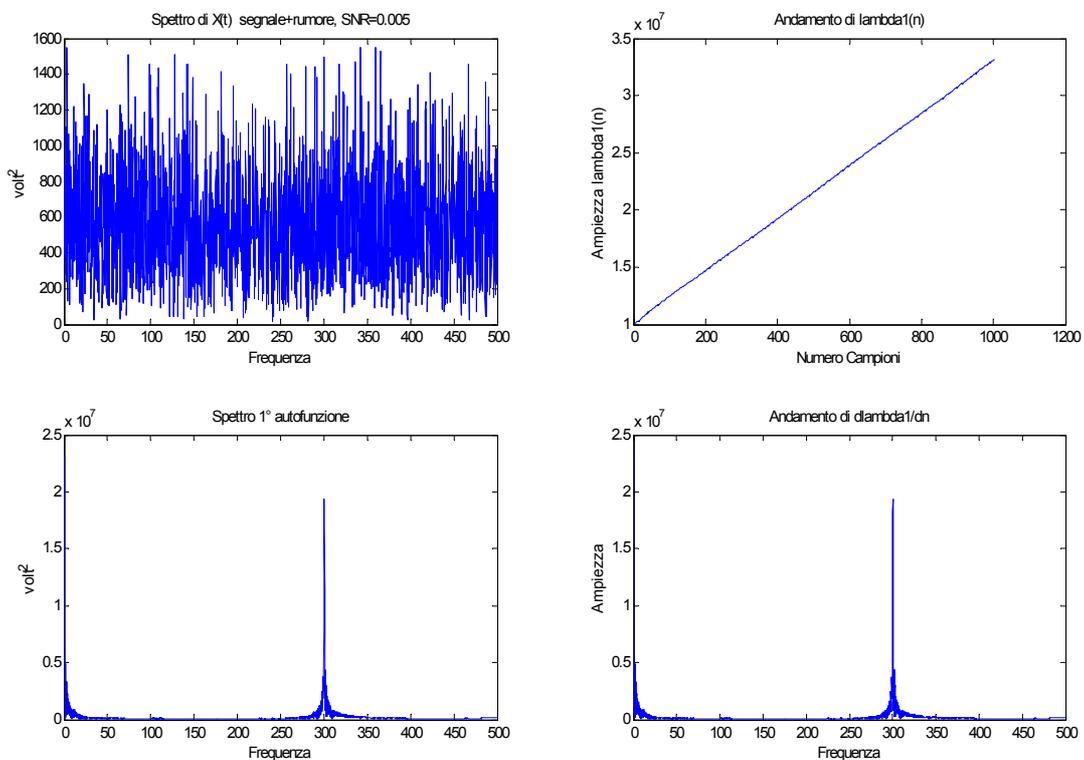


Fig. 8 SNR=0.005, segnale X(t) monocromatico, 1° autovalore, 1° autofunzione, $\frac{\partial \lambda(n)}{\partial n}$.

ricostruire il segnale, ed anche il metodo ispettivo sull'autovalore $\lambda_1(n)$ da risultati buoni, poiché l'andamento continua ad essere lineare e non rumoroso. In questo caso emerge forte la differenza tra FFT e KLT.

Segnale monocromatico, $SNR=5*\exp(-5)$;

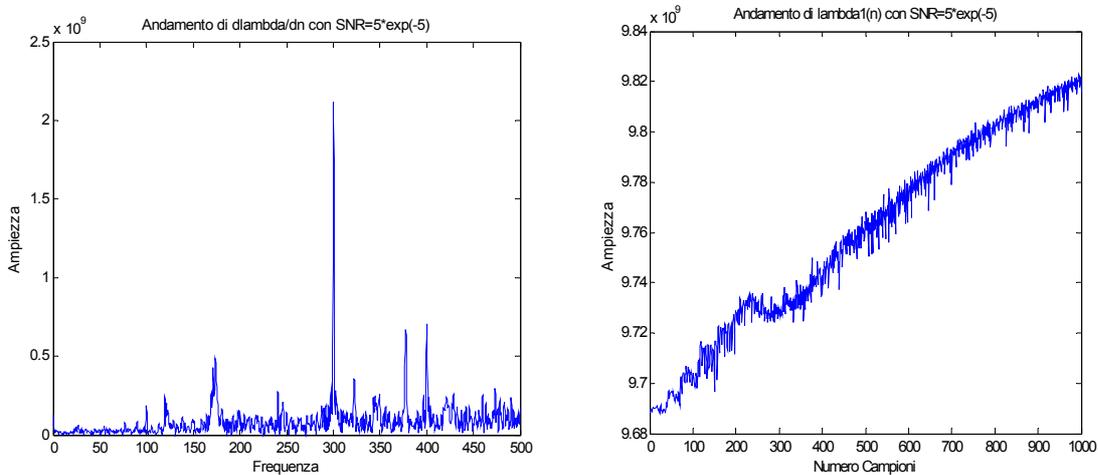


Fig. 9 $SNR=5*\exp(-5)$, $\frac{\partial\lambda(n)}{\partial n}$ e $\lambda_1(n)$ con 1 ora di integrazione.

In questo caso estremo si è con $SNR = 15 * 10^{-5}$ si è omesso di graficare sia il segnale, sia il suo spettro. Questo livello estremo di SNR ci costringe ad acquisire un certo numero di frame dati del campione, calcolare la funzione di autocorrelazione e mediarla nel tempo, in modo da abbattere il rumore ed ottenere circa la componente coerente; i risultati ottenuti hanno richiesto circa 3600 secondi di integrazione, e comunque non sono ancora del tutto accettabili, forse per un piccolo difetto di convergenza del metodo delle potenze (grafico 2), che comunque si può correggere diminuendo l'errore di tolleranza sul calcolo del primo autovalore. Tuttavia, come si vede dal

grafico 1, tramite il calcolo di $\frac{\partial\lambda(n)}{\partial n}$ possibile già riconoscere la nota di prova a 300 Hz, cioè il

nostro segnale sintetico, che verrebbe ancora meglio rappresentato con una maggiore integrazione oppure migliorando la tolleranza sul calcolo del metodo delle potenze. Il risultato rilevante emerge dal fatto che partendo dalla funzione di autocorrelazione e facendone la FFT, non è possibile in nessun modo riconoscere il nostro segnale di test, cosa che invece è possibile con la KLT.

Anche l'analisi ispettiva dell'andamento nel tempo nella parte finale di $\lambda_1(n)$ ci rassicura circa la presenza di segnale; ciò è ancora di più evidenziato dal seguente spettrogramma secondo il quale la nota di prova a 300 Hz compare da un certo momento in poi, che coincide con l'andamento lineare di $\lambda_1(n)$.

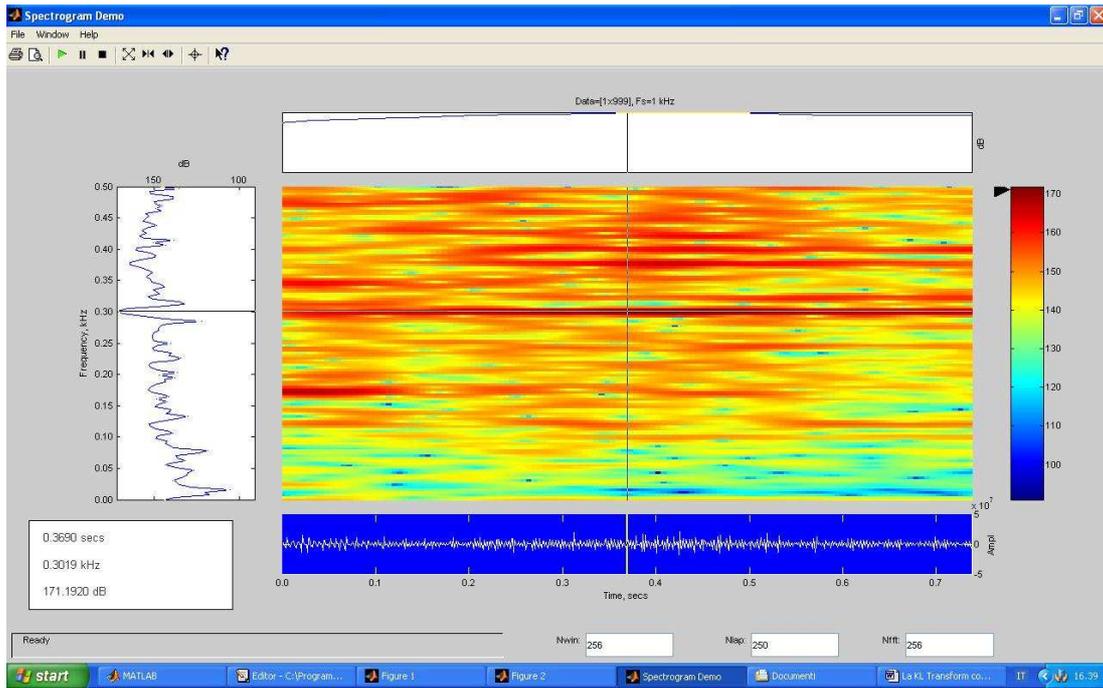


Fig. 10 $SNR=5 \cdot \exp(-5)$, Spettrogramma di $\frac{\partial \lambda(n)}{\partial n}$ con 1 ora di integrazione.

3.2 Segnali non monocromatici .

Segnale gaussiano, $SNR=0.15$.

Iniziamo ad analizzare un segnale non monocromatico gaussiano con una determinata larghezza di

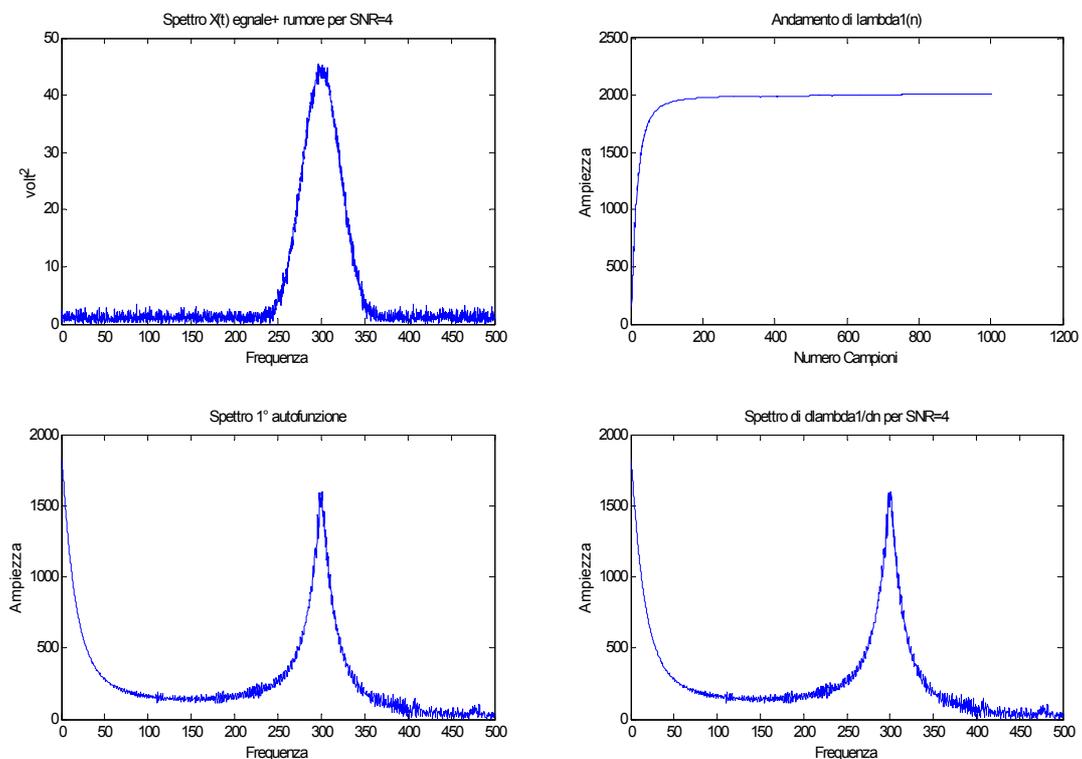


Fig. 11 Segnale sintetico Gaussiano, con $SNR=4$

banda (100 Hz), affetto da rumore. La figura 11 mostra la stessa procedura seguita in precedenza, con la differenza che adesso il segnale ha una determinata banda, la quale passa più o meno indenne dal processo di trasformazione. Naturalmente la presenza di una banda più larga presuppone che per SNR minori, si vada già ad integrare la funzione di autocorrelazione per ottenere risultati migliori.

Segnale gaussiano, SNR=0.001.

Estremizzando la situazione del segnale a banda gaussiana di cui in precedenza, con un SNR molto basso ottengono i seguenti risultati; è possibile ricostruire lo spettro di Fourier, ma occorrono diverse ore di integrazione del segnale, o della sua funzione di autocorrelazione;

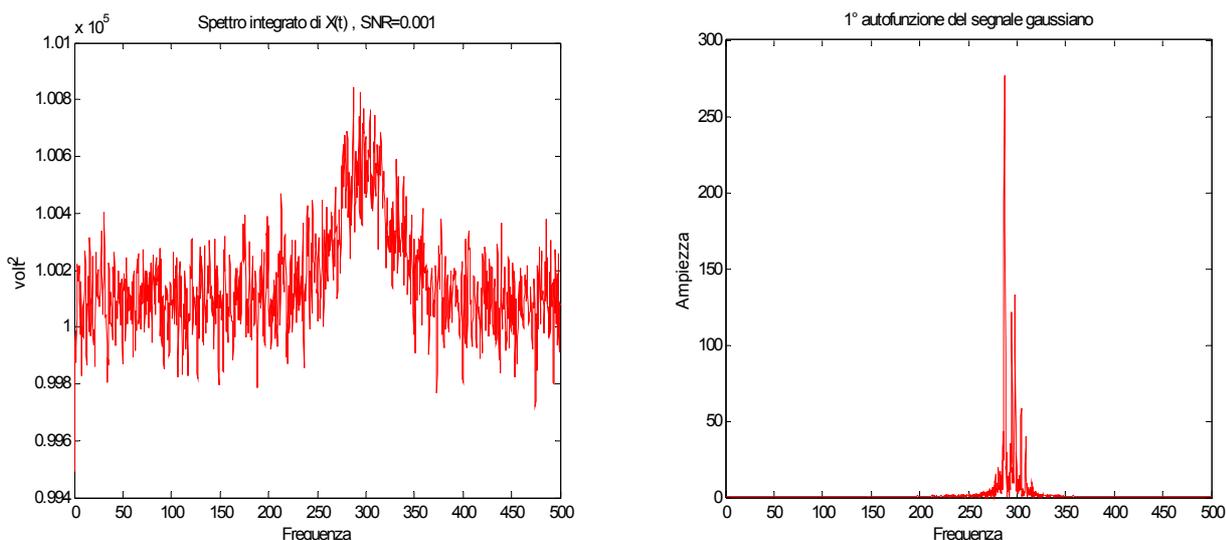


Fig. 12 Segnale gaussiano, spettro mediato su alcune ore di integrazione, spettro della prima autofunzione

diversa è la situazione della prima autofunzione, il quale spettro non è una fedele riproduzione

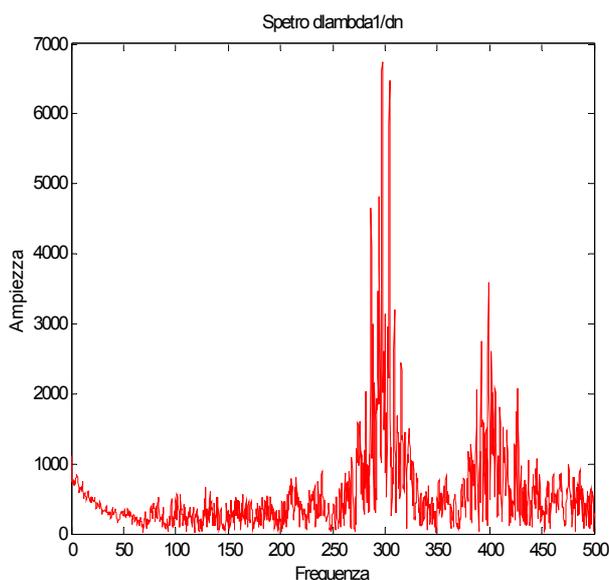


Fig. 13 Spettro di $\frac{\partial \lambda(n)}{\partial n}$

dell'originale , basti confrontare le due immagini della figura 12, anche se possibile ricostruire un dato importante quale la forma dello spettro e la larghezza di banda.

Una più fedele ricostruzione è possibile ottenerla dallo spettro di $\frac{\partial \lambda(n)}{\partial n}$, anche se esso è ancora sporco e risente di una non perfetta convergenza dell'autovalore.

Si potrebbe quindi concludere da queste ultime analisi , che il metodo funziona bene per la detection e la ricostruzione di segnali a banda stretta immersi in livelli di rumore molto alti, la detection di segnali che hanno una certa larghezza di banda, ma meno brillante risulta essere in fase di ricostruzione di questi ultimi, e questo perché l'informazione di primo autovalore e sulla sua derivata , non è sufficiente a riprodurre fedelmente le caratteristiche del segnale stesso.

In questo caso, quindi , qualora si voglia ricostruire il segnale in modo fedele, è necessario prendere in considerazione diversi degli autovalori dominanti dell'eigen-spectrum e delle autofunzioni ad essi associate.

Segnale naturale a larga banda

A riprova di quanto si è detto, si vuole riportare un caso di KLT con analisi della prima autofunzione e di $\frac{\partial \lambda(n)}{\partial n}$, relativo ad un segnale con banda ampia (ordine dei MHz) non sintetico.

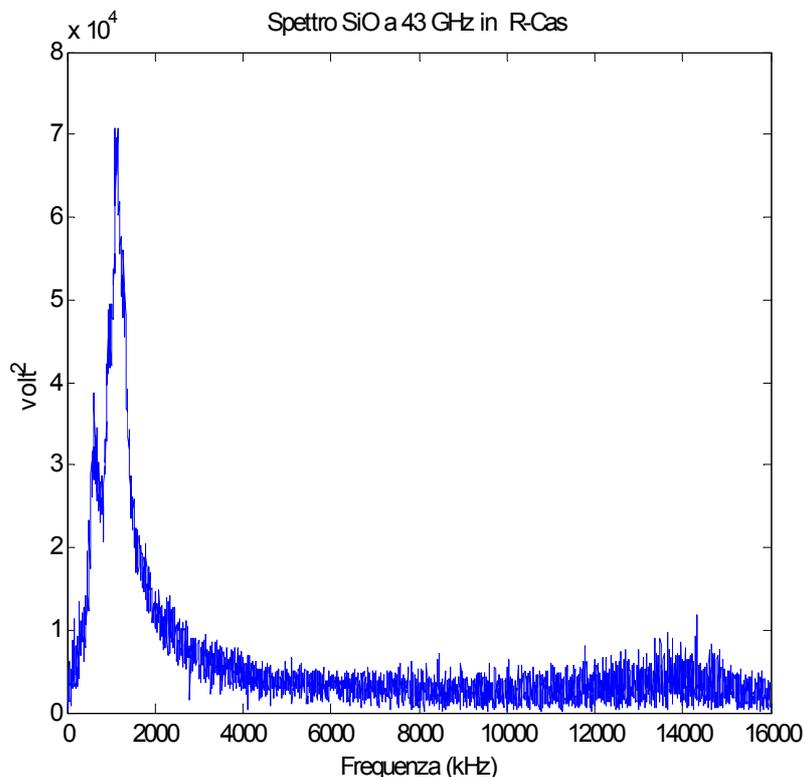


Fig. 14 Segnale naturale a larga banda

Il segnale è una riga di SiO a 43 GHz in R-Cassiopeia, registrata a Noto e analizzata con lo spettrometro SPARKLE dal quale è stata estrapolata la relativa funzione di autocorrelazione integrata qualche secondo.

I risultati circa l'analisi della prima autofunzione e di $\frac{\partial \lambda(n)}{\partial n}$ sono parziali e non permettono una ricostruzione esatta della riga, anche se permettono un drastico abbattimento del rumore.

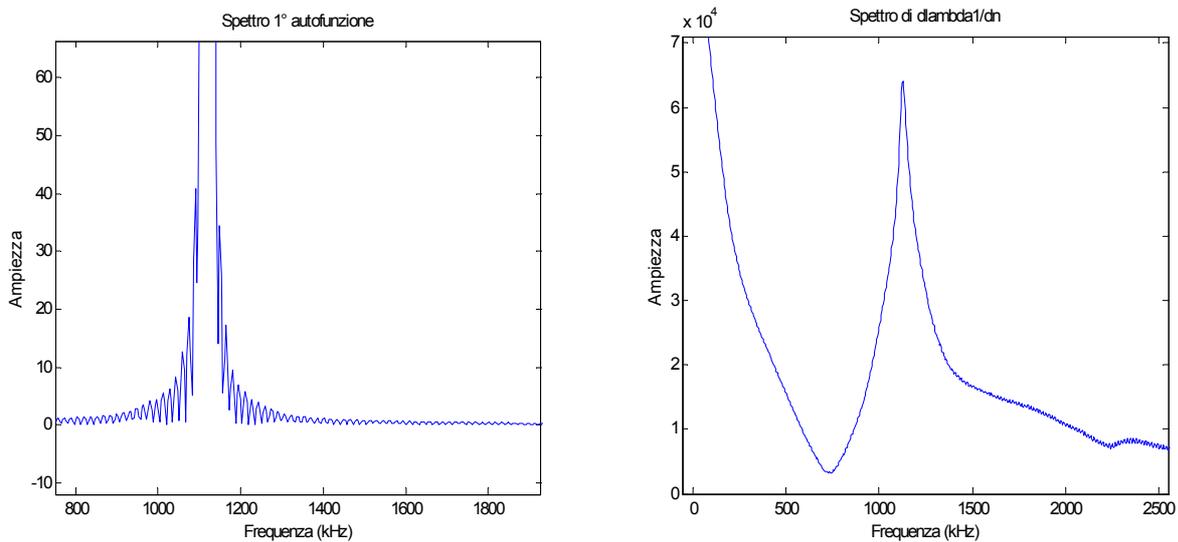


Fig. 14 Segnale naturale a larga banda, 1°autofunzione e $\frac{\partial \lambda(n)}{\partial n}$

In particolare la cosa che si può osservare è che la prima autofunzione ha maggiori dettagli dello spettro, ma ha una occupazione di banda piccolissima rispetto alla riga complessiva, mentre il $\frac{\partial \lambda(n)}{\partial n}$ non ha un andamento dettagliato, ma ripercorre circa la stessa forma e ha la stessa larghezza di banda del segnale originario.

Per cui allo stato attuale, se non si vogliono realizzare ricostruzioni di segnale o di spettro, ma solo detectare l'eventuale presenza di un segnale coerente, allora il metodo può essere preso in considerazione come utile.

Puro rumore in correlato.

Un ultima considerazione si basa sull'analisi dello spettro della prima autofunzione o del segnale $\frac{\partial \lambda(n)}{\partial n}$. In linea teorica l'andamento del primo autovalore nel tempo dovrebbe essere costante, visto che l'orlatura della matrice di autocorrelazione porta informazione solo sulla diagonale principale (e tale informazione è una delta di Dirac per rumore incorrelato). Tuttavia il rumore non è sempre incorrelato e quindi l'andamento dell'autovalore è simile a quello del segnale in termini di andamento crescente, ma certo presenta un andamento casuale nel rate di aumento. Lo studio

mediante FFT dei due segnali per capirne il rispettivo contributo spettrale risulta utile, tuttavia è conveniente portare a termine anche uno spettrogramma di entrambi i segnali, per evitare false detection. Potrebbe infatti succedere che contributi di rumore vengano scambiati per segnali presenti nel frame dati, questo perché lo spettro dell'autofunzione o di $\frac{\partial \lambda(n)}{\partial n}$ presentano dei picchi.

Tuttavia, una analisi attenta sia all'andamento dell'autovalore al variare del tempo, sia dello spettrogramma della sua derivata dicono in modo coerente che esistono sì dei picchi, ma essi hanno una durata temporale minima (sempre coerentemente con il principio di indeterminazione tempo frequenza insito nella Fourier Transform). Quindi, in definitiva, un segnale è presente solo quando è persistente nello spettrogramma, ed inoltre una analisi ispettiva dell'autovalore principale non presenta un andamento rumoroso.

I successivi grafici aiutano a comprendere quanto esposto.

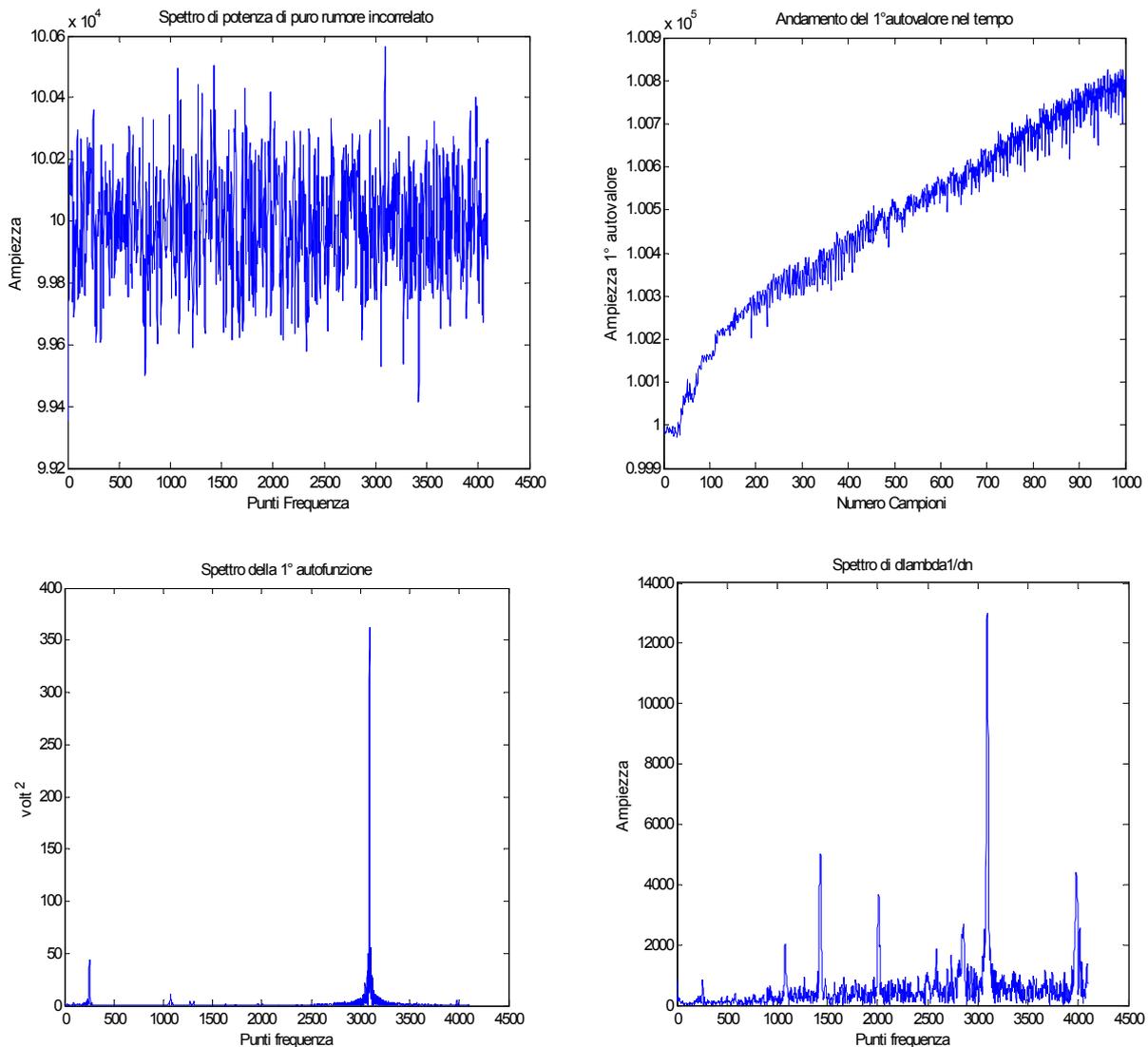


Fig. 14 Rumore incorrelato, Spettro, andamento del 1° autovalore, 1° autofunzione e $\frac{\partial \lambda(n)}{\partial n}$

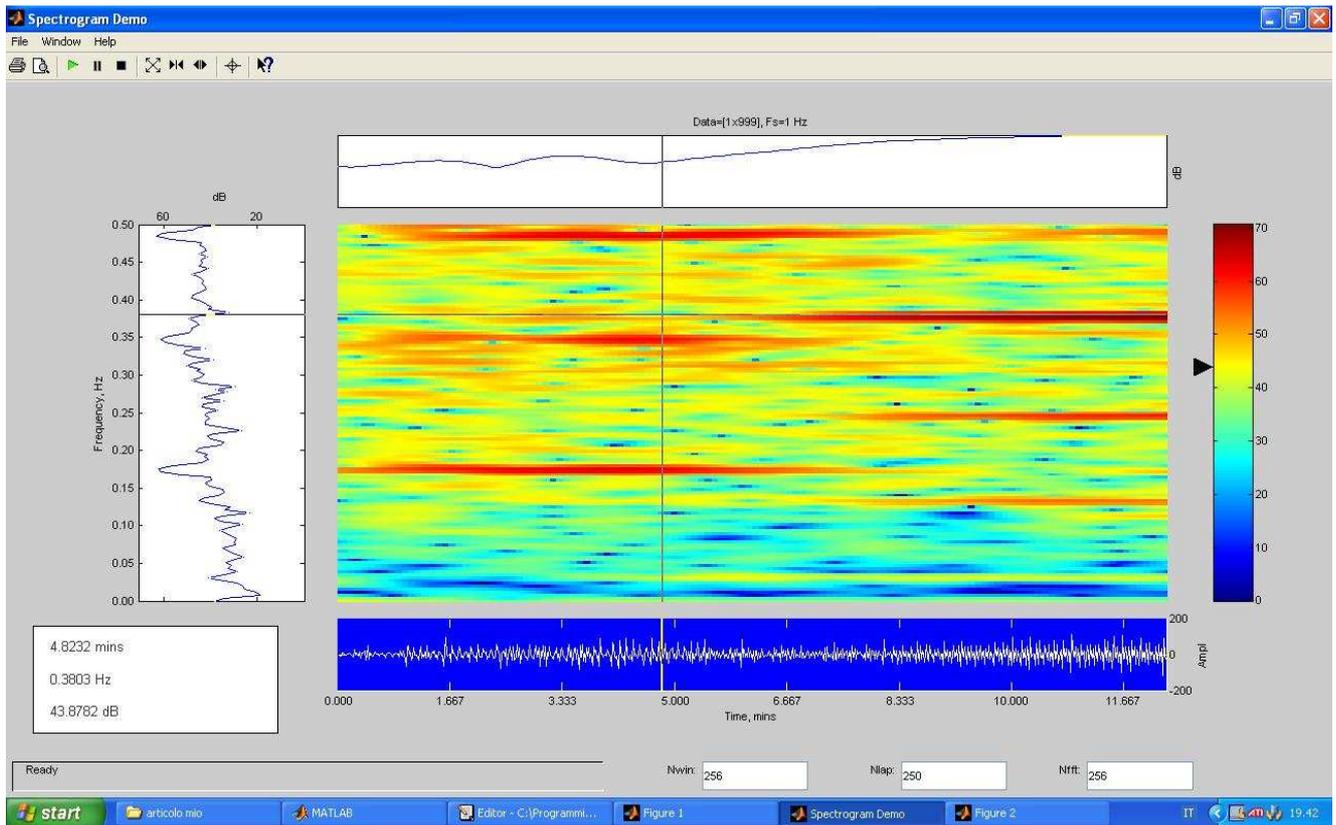


Fig. 15 Rumore incorrelato, spettrogramma di $\frac{\partial \lambda(n)}{\partial n}$.

4. Conclusioni

In definitiva si possono trarre le seguenti conclusioni:

- 1) La KLT è un ottimo strumento per il denoising di segnali coerenti su livelli di rumore molto alti, anche se da un punto di vista computazionale è pesante e non esiste un metodo fast in grado di velocizzarne il calcolo.
- 2) Il metodo di Oratura della Matrice di Autocorrelazione (OMA) è un buon metodo, veloce ed affidabile per la detection di segnali coerenti, con banda qualsiasi, immersi in livelli di rumore anche molto alti. Tuttavia per la ricostruzione di segnali a banda più ampia, l'analisi del primo autovalore non da risultati così brillanti e diventa necessario il calcolo di altre componenti dell'eigen-spectrum.
- 3) Il metodo OMA soffre gli alti livelli di rumore solo in termini di incertezza del metodo delle potenze, utilizzato nel calcolo del 1° autovalore della matrice \mathbf{T} ; questa incertezza tuttavia può essere eliminata tarando bene i parametri di calcolo, oppure abbattendo una quantità di rumore integrando per un certo tempo il segnale, e può essere rilevata dall'andamento più o meno rumoroso nel tempo del primo autovalore.

- 4) Il calcolo di $\frac{\partial \lambda(n)}{\partial n}$ permette di ricostruire le componenti coerenti del segnale, risparmiando risorse di calcolo e di memoria. La detection di un eventuale segnale coerente risulta persistente nel tempo, distinguendosi dal rumore fin dai primi istanti di analisi. Ecco perché è importante condurre uno spettrogramma del segnale $\frac{\partial \lambda(n)}{\partial n}$ al variare del tempo, in modo tale da eliminare le false detection di toni, insite nell'analisi di segnali puramente in correlati, nei quali però non esiste persistenza nel tempo di tali frequenze.
- 5) Per snr molto bassi, è necessario condurre una procedura di integrazione del segnale, dalla quale comunque è possibile estrarre eventuali componenti più velocemente con la KLT che con la FFT.

Bibliografia

- [1] **C. Maccone**, Innovative SETI by KLT, PEŠEK LECTURE 2003 and paper # IAA.9.1 01
Session IAA.9.1 “SETI 1: Science and Technology”
- [2] **P. Pari**, Rilevazione di segnali tramite trasformata KLT nel progetto SETI, Tesi di Laurea
Università di Bologna
- [3] **C. Maccone**, *Telecommunication KLT and Relativity*, IPIPress, Colorado, 1994.
- [4] **C. Maccone**, “The Karhunen-Loève Transform: A Better Tool than the Fourier Transform
for SETI and Relativity”, *Journal of the British Interplanetary Society*, Vol. 47 (1994), page 1.
- [5] **Papoulis** - Probability, Random Variables & Stochastic Process
- [6] **Poularikas**, *The Transforms and Applications Handbook* (2ed, CRC, 2000, 1335s)(T)
- [7] **Iohvidov I.S.**, *Hankel and Toeplitz matrices and forms. Algebraic theory* (1982)(L)(T)
- [8] **Golub G H , Van Loan C F**, *Matrix Computations* (Pages 308 To 694)(3Ed., jhu.djvu